P. RAMI ARITH-METICAE LIBRI DVO: GEOMETRIAE SEPTEM ET VIGINTI.



BASILEAE, PER EVSEBIVM
Epiſcopium, & Nicolai fratris hæredes.
ANNO M. D. LXIX.

P. RAMVS LE-
CTORI S.

*EX omnibus vigiliis (Lector) multos per annos in ar-
tium liberalium inſtitutione elucubratis nihil elemen
tis mathematicis, nobis æque' vel exercitũ laboribus,
vel anxium curis, vel periculoſum temporibus acci-
dit. Nam cum á primis annis mathematum amore
captus, Orontio Fineo (qui primus regia profeßione in
Galliam mathematicas artes retulit) operam dediſſem, protinus abdu-
ctum rhetoricæ & philoſophicæ exercitationes occuparunt: Interea tamen
Ioannem Penam noſtræ diſciplinæ alumnum nactus mathematici oneris
faſce me ſublevatum & exoneratum putari. Adoleſcens enim fuit inge
nio quidem ad omnes artes percipiendum mirabili, ſtudio autem in literis
latinis & græcis, in philoſophia præcipué & mathematica tanto, ut arden
tius aut flagrãtius nihil unquam viderim. Quare cum mathematica pro-
feßio vacaret, & á nobis in examẽ productus, æmulatione competitorum
ſeverius examinatus eſſet, ita mentes omnium cepit, ut etiam adverſarii
eo loco dignißimum judicarent. Ergo commendatione tam raræ eruditio-
nis profeſſor factus, cum noſtris conſiliis excitatus ſpem mathematicæ illu-
ſtrationis incredibilem concitaſſet, anno ætatis ſexto & viceſimo in ipſo
profeßionis pene veſtibulo extinctus eſt, magno mærore noſtro, magnoq;
mathematicarum rerum detrimento. Itaq; cum de phyſicis iam cogitarem,
ſaxum idem rurſus humeris noſtris impoſitum, animo potius quam robore
ſuſtinui. Auxilia undique exquiſivi. P. Forcatelus (quod in mercatore
Hippocrate mirum fuiſſe alibi ſcripſimus) ſine literatura, ſine philoſophia,
ſolo ingenio atq; uſu quodam mathematicus ſeſquiannum apud nos fuit.
Hoc adjumẽto uſus cum Euclidem totum accuraté obſervaſſem, ecce belli
civilis calamitas, fuga civium, bibliothecæ direptio, fruſtraq; labores eu-
clidei: Verum pace reſtituta, interim dum Grammaticam, Rhetoricã, Dia-
lecticam recoquimus, reliquias naufragii recolligere libuit, & per Cardi-*

nalem Caſtellonium pariſienſis academiæ id eſt omnis doctrinæ conſervatorem Forcatelo (cum alter mathematum profeſſor defunctus eſſet) mathematicam profeßionem procurare: ut gallica ſaltem lingua gallicam juventutem exercendo regii collegii columnam iſtam qua poſſet, facultate tueretur. Antecedentibus igitur ſtudiis illis expeditis Euclides de integro repetitus eſt, & diligẽtius quam antea diſceptatus: Intereaq́ Federicus Reſnerus germanus nobis adfuit, qui quid in literis & mathematis poßit, propediem ſuo marte in Opticis Alaceni & Vitellonis declarabit. Atq́ hæc ſecunda aggreßio cum ſtrenué procederet, inſania furioſorum humano ſanguine nondum ſatiatorum rurſus erupit, nec propius quicquam fuit, quam abjectis cæteris cogitationibus ſaluti conſulere, id fuit in optimatum caſtra confugere, & pro diagrammatis radio deſcriptis urbes ferro flammaq́ deletas, ſtrages totis campis miſerabiles, prælium deniq́ longé omnium acerrimum ſpectare. Quid enim pariſienſi prælio ſimile vel Marathon Periclis vel Salamis Themiſtoclis habuit? Sed hæc matheſis alio problemate deſcribetur. Tempeſtas ſexto poſt menſe ſedata eſt, domum reuerſus nil in bibliotheca præter inania pulpita reperi. Reſnerus noſter (qui Lutetiæ permanſiſſet) é prædonum manibus mathematicas commentationes averterat. At vix domũ reverſus videri poteram, cum jam tertiam tempeſtatem non obſcuræ nubes cælum intuentibus monſtrarent. Cumq́ Iulianus alter edicto ad omnia academiæ compita per falſum regis nomen publicato (rex enim Chriſtianißimus, ubi per ſenatum hac indignitate commotum reſcivit, indignißime tulit) cum Iulianus (inquam) alter iterum chriſtianos ſcholis prohiberet: imó veró quod apoſtata ille nunquam cogitarat, armis expelleret. Itaq́ ne tertio naufragio funditus periremus, impetrari ab humanißimo rege annuæ ad Europæ nobiles academias peregrinationis tanquam legationem liberam, é mediaq́ flamma mathematicos illos omnium rerum longé charißimos penates in Germaniam abripui: In extremis tamen regni finibus cum brevia & ſyrtes prætervectus mihi viderer, duodecim equites é jugo montis decurrentes animadverti, cædemq́

intentan-

intentantibus & Condæi principis conſiliarium hoſtiliter inclamantibus ultro occurri, & diplomate regij commeatus tantiſper repreſſos docui longé alio nos apud regem eſſe numero locoque quam ipſis eſſet perſuaſum, aliaque tali tempori accommodata diſſerui. Ter dimiſſus, ter repetitus, tandem velocitate ſumma eó perveni, ubi ſicarijs licentia nequaquam par eſſet. Deinceps tutus & lætus in Germaniam adventus bonorum ac doctorum omnium (quibus adhuc occurrimus) ſingulari humanitate & gratulatione exceptus eſt. Hoc ſacrum mathematis aſylum fuit: reducta tandem (ut tertio mathematicarum ſcholarum libro propoſuimus) & compoſita utcumque & numeris & lineamentis ſunt elementa, eaq; edita & publicata, ſaltem ne tot periculis erepta impoſterũ periclitarentur. Verumtamen tanta malorum Ilias inſequitur, ut cum reſpirare primum cœperim, tum afflictæ patriæ graviſſimum dolorem animo percipiam. Laborum iſtorum partus feliciora lucis auſpicia mereri videbatur. Quemnã igitur mecœnatem hoc munere potiſſimum colerem? Chriſtianiſſimumne regem? an ex optimatibus noſtris præcipuum aliquem? At Galliæ neſcio quæ funalis erynnis miſerabile regi ſpectaculum in ipſo & regni & ætatis initio videtur extruxiſſe, in quo principes regni ſui mutuis cædibus concurrentes ad extremum regni exitium ſpectare cogeretur. Itaq; Deus optime maxime miſerere pereuntis regni, ſolem purioris religionis clarum & illuſtrem in Galliam tuam reducito, regem meum regum omnium beatiſſimum efficito: arma tot fortium utrinq; virorum in hoſtes nominis tui convertito. Interea veró mathematum ſtudioſos omnes obſecrabo, ut ſuſcipiant laceras iſtas totoque æquore iactatas

—Reliquias Danaum atq; immitis Achilli

Si in Angliam repulerint: Eliſabetham reginam laudum uirtutumque omnium patronam reperient. Si ad I. Steuardum Scotiæ rectorem principem cum bellica laude tum uera pietate inſignem acceſſerint, nuſquam á magiſtro naufragos veluti condiſcipulos gratiores acceſſuros exiſtimem. Germania jam mihi altera patria eſt, & præſens ſingulos mathematico

proœmio appellatos ſalutare ſtatuo. In Italia Hieronymum Cardanum et Federicum Commandinum ubi ſalutaverint, non dubito quin gratis animis excipiantur. Sed in Luſitaniam ad P. Nonium ſecundos ventos exoptaverim. Hic enim vir Archimedeus, vir (inquam) Archimedeus eſt, qui ejectis & egentibus præcipué poſſit opitulari. Scripſi & reſcripſi hic pleraque millies, & infinitis ſubinde modis commutavi, antequam ad propoſitam methodi normam quadrarent, magiſq; logicam in mathematico themate exercui, quam mathematicam in ſuo pulvere ſerioque uſu tractavi: neque jam biennio toto ad hæc ſtudia recolendum á novis quotidie turbis requies ulla fuit: neque ideo dubito, quin tanta commutatio tanque tumultuaria editio pleraque tulerit, quæ pacatioris & quietioris otii meditatio non ferret: Hanc igitur meditationem mathematici mathematico proœmio appellati capeſſite: uſum locis omnibus exigite: hujus enim gratia permulta ex elementis ſuſtuli, & vos fortaſſe plura tolletis: aut quorundam nobis ignotum fructum demonſtrabitis. Statueram ſingulos libros ſingulis veſtrum nuncupare, quod equidem confido reſtituta pace facturum, ut accuratius ſingula corrigerentur & illuſtrarentur. Inſanire enim pleoſque doctos homines exiſtimo, qui patronum & quidem plerunque rerum ipſarum ignarum adverſus reprehenſores operum ſuorum præfationibus invocant, quaſi & dii quidam ſint, qui nihil offenderint, aut peccata ſua corrigi reipub. pernicioſum arbitrentur. Quamobrem quantus cujuſque veſtrum erga mathematicas artes eſt amor, tantum in mathematicæ dignitatis emendationem & perfectionem incumbite, gratius iſto beneficio atque optabilius mathematum ſtudioſis accidere nihil poteſt.

ERRATA ARITHMETICAE SIC CORRIGITO: primus numerus paginam, ſecundus lineam ſignificat.

1,23 *nota puncta in periodis*. 3, 4 *loci : tum* 1 & 2 & 7 *ſunt* 10 *pro* 1 *ſequentis loci*. 8,35 *diviſorem & facio* 12,14,32 *ſi primus non*: 15.36 *pro ipſis erit*. 15, 30 *pro* 2 *lege* 8. 17.30 $\frac{2}{3}$, 32 *dividam* 5 *aſſes* 12.20,7 $\frac{6}{49}$, 10 *numeros alternis*. 24, *ſervabo* : 23,8 *pro* 2 *lege* 3 : & 26, *ſupertri quarta*. 24, 8, *ſic* 10 *ad* 12 & 35 *á medio ſuperat factum ab extremis facto*. 27,4 *lege* 89 $\frac{1}{7}$. *Eme*, 16 *iam*. 31, 10 *imitatus eſt*, 31 *lege* $\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\,\frac{2}{3}$

ERRATA GEOMETRIAE SIC CORRIGITO: primus numerus paginam, ſecundus lineam ſignificat. Figuras quaſdam everſas aut tranſpoſitas redigito in ordinem.

5,16 *aſymmetræ*. 6,3 *ab* Euclide. 8,15 *inſcriptā*. 23,39 *geometricæ*. 42,6 i u y. 42,7 & 8 a u y, 9 a & y. 57, 7 *item*. 11 *baſi* y e *erit* e i *ad* i u *ut* y o *id eſt per* 5 e 12 e 5 a i *ad* o u, & *alterné, ut* e i *ad* a i, *ſic* i u *ad* o u. 58, 9 *per* 2 & i e, 21 a i e *æquantur*, 32 *eadem* a e. 60, 29 *in minore*. 64,30 *terminum*. 65,13 *menſoris*. 66,36 *ad* u a, 41 *recedendi*. 67,9 *pone* l *ad finem radii optici in figura*. 68,3 *th* Euclidis, 19 *pedum* 20:70,30 $\frac{9}{21}$. 71,19,63. 75, 5 *parallelogrammi*. 76, 10 *alterna*, 12 *cum rotundo*, 13 *duplum trianguli*. 85,1 *celebratum*, 40 *ſi*. 87,15 & *duplici*, 31 *conſectarium*. 88,6.1 44: *Hæ notæ ſignificant quot*. 89,1 *ſingulares*. 90, 11 *pone in figura* 12. 91, 21 *Cardanus tantum agri*. 92,13 *triplex*. 93,3 *dele tertio*. 13 *totius*. 94,10 & o e i, 36 n ȷ y. 95,27 l ś *id eſt*, 29 *latera*, 40 *fuerunt rationales*. 97, 10 *repone* o *in fine lineæ* i l. 103,2 *utcunque*, 32 *geneſis*. 105,25 *ſintque*. 108,15 *bae*. 110,1 a e *ſecet*. 115, 31 *æquilatera*. 118, 5 *repone in figura tangentem* i u. 128,37 *fac diametrum* a o u. 141, 26 *dele denique*. 142, 27 é 18 &. 144, 12 *puncto t*. 146, 24 *quam* a i & a o *æquatur*. 151, 1 *æquantur*. 154, 12 *ſi*, 30 *planis* s r l m, & u ȷ v f *biſecantibus*, 32 *dele duo plana* s r l m & u ȷ v f 32 *ſectio* t f. 156,20 é i c 15 e 4. *ſtereometria*. 161, 9 *ſtereometria*, 11 *additus*. 164, 15 *Et ita*, 16 *demonſtrantis*. 166, 16 *duplex*, 19 y n, 30 *in*. 179, 1 d b. 180, 18 *duobus*. 185,15 *manens eſt*. 186,51 *cylindri*. 187, 13 *hæc geodæſia*, 26 *cylindris* a b, 27, *vaſis*. 189,12 *diametro*.

P. RAMI ARITHMETICAE LIBER I.

CAP. I. DE NOTIS ARITHMETICIS.

ARithmeticæ eſt doctrina bene numerandi. Partes arithmeticæ duæ ſunt, ſimplex & comparatiua: ſimplex, quæ conſiderat ſimplicem numeri naturam. Numerus eſt ſecundum quem unum quodque numeratur: ut ſecundum unitatem unum, ſecundum binarium duo, ſecundum ternarium tria, & ſicdeinceps omnes numeri: Itaque numerus eſt unitatis aut multitudinis: poteſtque eſſe minimus, ut unitas: maximus autem quo major, dari nequeat, nullus eſſe poteſt. In numero ſpectatur primum notatio, deinde numeratio. Numeri, vero in abaco ſcribendi & notandi hæ decem ſunt notæ. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. quarum prima ſignificat unum, ſecunda duo, tertia tria, quarta quatuor, quinta quinque, ſexta ſex, ſeptima ſeptem, octaua octo, nona novem: Circulus quæ nota eſt ultima: nil per ſe ſignificat: valet tamen ad alias notas amplificandum: Amplificationis gradus ſunt tres, deincepsque periodis ſimiliter iterati, ſemel, decies, centies. Nam de primis novem notis quælibet ſola, aut ultimo univerſi numeri loco, ſuum numerum ſemel exprimit: penultimo, decies, antepenultimo centies: Hæc prima eſt periodus: Secunda eſt millium. Quarto itaque loco numerabis millena ſemel, quinto decies, ſexto centies. Hinc ſequitur tertia periodus, ubi numerabis millies millena ſemel, decies, centies: tum ſimiliter quarta periodus eſt millies millena millia, ubi tres illi gradus ſimiliter iterantur: & ſic in infinitū. Numeros igitur ita notabis unū 1. decem 10. centum 100. mille 1000. decem millia 10000. centum millia 100000. millies millena 1000000: duo 2. viginti 20. ducenta 200. duo millia 2000. viginti milla 20000, ducenta millia 200000. bis millena millia 2000000: ſic notæ ſingulæ locis ternis augentur. Atqui ſi numeri pluribus notis deſcripti & collecti ſumma lōgior fuerit: ut eam ſuis partibus efferre condiſcas: fines periodorum punctis diſtinguantur. Numerum igitur decē his notis ſic interpunctum 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 ita enuntiabis: Primo membro dices millies millena millia. Secundo ducenties tricies quater millena millia. Tertio quingenta ſexaginta ſeptem millia: Quarto octingenta nonaginta. Quapropter hoc commune velut alphabetum decem notarum ad quemlibet notandum numerum eſto, alphabetum tamen non voci, ſed manui & ſcripturæ, id eſt abaco neceſſarium.

CAP. II. DE ADDITIONE.

NVmeratio è duobus oblatis numerorum terminis tertium invenit, & quidē niſi tota ſimul expediri poſsit, inductione partium utitur, quoniam idem

eſt numerare per totum & per partes, tumque nota quælibet tanquam ſolitaria ſpectatur, & ſi ſequenti numerationi ſerviat, mente reſervatur ad effugiendum crebrioris lituræ tædium. Numeratio eſt prima aut conjuncta. Prima, quæ numerum cum numero ſemel numerat, ut additio & ſubductio. Additio eſt numeratio prima, qua numerus additur numero, & habetur totus. Hic ſunt decem unitates. 1.1.1.1.1.1.1.1.1.1. quibus addendis numeramus 1.2.3.4.5. 6. 7. 8. 9. 10: ubi ad numerum quemque antecedentem unitas additur: & hæc prima ſpecies eſt additionis per unitatem: 2 addatur ad 1, totus erit 3: & 2 addatur ad 3, totus erit 5: & hic ſecunda ſpecies eſt additionis per 2: 3 addatur ad 1, totus erit 4: 3 addatur ad 4, totus erit 7: & tertia ſpecies additionis erit per 3: & ſic deinceps. Additio numerorum continuorum prior & facilior eſt, quia toti cum totis ſimul adduntur: ut ſi quatuor debitoribus primus debeat aureos 1000. ſecundus 200. tertius 30. quartus 4: ſummam continenter addes, & dices eſſe 1234 aureos, & ſic Ariſtoteles ait numerum neceſſario numerari per additionem. Additio diſjunctorum numerorum præcipuam meditationem requirit, & quidem in notis primum inter ſe ſingulis: ut diſcipulus prompte ſciat addere ſingulas cum ſingulis: ut 1 & 2 ſunt 3: 4 & 5 ſunt 9: 9 & 8 ſunt 17, & ſimiliter totum alphabetum 1.2.3.4.5.6.7.8.9, ſurſum deorſumque addendo meditetur. Hic Pythagoræus additionis abacus eſt. Numerorum diſjunctorum additio ſiniſtrorſum inducenda eſt, ut excreſcentes ſummæ locis excreſcentibus ordine facilius notentur: & ex ijs additis collectus numerus interjecta linea, ſubnotetur. Eſto primum exemplum faciliimum. Debitor tibi debet uno nomine coronatos 234, alter 111: Quæratur igitur quæ ſumma ſit ex utroque. Ordine diſpoſitis numeris, ut ſimiles inter ſe reſpondeant hoc modo.

2	3	4
1	1	1

ſic incipiam: 1 & 4 ſunt 5. Itaque 5 ſubnotabo: deinde 1 & 3 ſunt 4: & hic ſecundo loco 4 ſubnotabo: Denique 1 & 2 ſunt 3: quæ ſimiliter ſubnotabo. Inductio ſic erit.

2	3	4
1	1	1
3	4	5

In hoc exemplo tertius numerus invenitur è duobus datis: inducitur per partes, quæ ſingulæ tanquam ſolitariæ ſpectantur. Eſto jam paulo plenius exemplum ubi mentis reſervatio adhibeatur: addantur 56789 ad 1234: diſpoſitis numeris hoc modo.

5	6	7	8	9
	1	2	3	4

ſic incipiam ab ultimo loco: 4 & 9 ſunt 13: hic duæ notæ ſunt duobus locis notandæ:

tandæ: ultima ſcribenda eſt ultimo loco, & ſecunda reſervanda in ſecundum locum. Itaque ſubnotabo 3 & reſervabo 10 pro uno ſequentis loci, & dicam ſequenti loco, 1 & 3 ſunt 4: 4 & 8 ſunt 12, ſubnotabo 2 & reſervabo ut antea, 10 pro 1 ſequentis loci: tum 1 & 1 ſunt 2: & 2 & 6 ſunt 8: quæ ſubnotabis: Deinde 5 ſola reperiam, quæ ſola ſimiliter ſubnotabo: denique invenies his duobus numeris additis totam ſummam eſſe 58023. Inductionis ſumma ſic erit.

5	6	7	8	9
	1	2	3	4
5	8	0	2	3

Poteſt verò & complurium numerorum eſſe additio, ſed tamen duo tantum ſeparatim ſpectantur, & duo primum additi tanquam unus additur ad tertium, neque duobus plures adduntur, ut tertius inueniatur: Ut ſi quæratur quampridem vixerit Homerus, & reſpondeatur è Gellio, 160 annis ante conditam Romam, quæ condita ſit ante natum Chriſtum annis 752: Chriſtum vero natum anno abhinc 1567. addantur hi tres numeri: Summa inductionis indicans Homerum annos abhinc 2479 floruiſſe, erit hoc modo.

	1	6	0
	7	5	2
1	5	6	7
2	4	7	9

Idem erit ſi quotlibet numeros propoſueris, ut hic.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	1	0	0	2	0	0	3	0	4
	7	9	5	6	8	3	1	0	9
2	0	0	6	9	9	4	5	2	3

CAP. III. DE SVBDVCTIONE.

SVbductio eſt numeratio prima, qua numerus ſubducitur à numero, & habetur reliquus. Subduco 1 de 2, manet 1: 2 de 5, manent 3: 3 de 9, manent 6. Subductionis meditatio in ſingulis notis eadē hic eſſe debet, quæ fuit in additione: Tollo 3 de 7, manent 4: tollo 4 de 9, manent 5: & ſimiliter totum alphabetum 123456789 omni genere verſandum. Hic Pythagoræus ſubductionis abacus eſt. Iam ſit exemplū ubi totus numerus à toto ſimul ſubduci non poſſit, ut ſi

de ſumma æris illius alieni 3 4 5 ſubducenda ſunt 2 3 4, diſpoſitis ordine numeris hoc modo,

3 4 5
2 3 4

ſubducendo infra: ſupra autem à quo ſubductio facienda, incipiam à ſiniſtra dextrorſum, contra quam in additione: Tollo 2 de 3, manet 1, & ſupernoto 1 deletis 3 & 2. Deinde ſubducam 3 de 4, manet 1, & ſupernoto 1 deletis 4 & 3: denique ſubductis 4 & 5 manet 1, & ſupernotabo 1, deletis 5 & 4: unde inveniam reliquum eſſe 111, cum ſubduxero 2 3 4 à 3 4 5. Inductio tota ſic erit.

1 1 1
3 4 5
2 3 4

Hoc exemplum invenit è duobus oblatis tertium, inducit per partes, easque tanquam ſolitarias. Eſto jam & exemplum reſervati mente numeri, nempe cum ſequens ſubducēda nota major eſt, quàm ſuprapoſita, tum è reliquo præcedente, 1 mente reſervabo, quod notam ſequentem denario augeat: ut ſi ſubducenda ſint 3 4 5 de 4 3 2, cum ſubducam 3 de 4 non ſupernotabo 1, quia 4 ſequens ſubducenda nota major eſt ſuprapoſita 3, ſed illud mente reſervabo, & 4 ſubductis à 13 manerent 9, quæ nequaquam propter eandem cauſſam notabo, ſed uno minus, 8 tantum ſupernotabo, & 1 mente reſervabo, quia ſequens ſubducenda nota major eſt. Itaque 5 ſubductis à 12, reliqua 7 ſupernotabis: unde inveniam ſubductis 3 4 5 de 4 3 2 relinqui 87. Tota inductio ſic erit.

8 7
4 3 2
3 4 5

Hæc ſubducendi vera via eſt, & majoribus deinde numerationibus neceſſaria, nec omnino prius antecedens nota eſt ſubducenda, quàm providero unde reliquæ ſubduci poſsint. Si intercurrant circuli ſignificantibus notis, cum ſimilibus tamen inſcribendi, & eadem tenenda via eſt. Carolus magnus anno Chriſti 801 coronatus eſt imperator: nunc autem annus eſt Chriſti 1 5 6 7. anni itaque ab imperio Caroli nunc ſunt 766. Inductio ſic erit.

7 6 6
1 5 6 7
8 0 1

Jam ponatur exemplum majoris differentiæ: ut à 4 0 0 0 0 2 3 ſubducantur 9 9, reſta-

99,reſtabunt 3999924, inductio ſic erit.

3 9 9 9 9 2 4
4 0 0 0 0 2 3
9 9

Sit & alterum exemplum, ut ſubducantur 287659 de 387657. Inductio ſic erit.

9 9 9 9 8
3 8 7 6 5 7
2 8 7 6 5 9

Si plures termini fuerint vel ſubducendi, uel ejus, à quo ſubductio facienda, reducendi ſunt prius additione in unam ſummam: ut ſi velis ſubducere 465 de 234. & 905. addes 234 & 905, totus erit 1139: unde ſubductis 465, reliquum erit 674.

CAP. IIII. DE MVLTIPLIcatione.

NVmeratio prima ejuſmodi eſt, conjuncta ſequitur, quæ numerũ cum numero toties numerat, quoties proponitur. Numeratio cõjuncta eſt multiplicatio, aut diuiſio: multiplicatio eſt, qua multiplicãdus toties additur, quoties unitas in multiplicante cõtinetur, & habetur factus: unitas auget addendo: ut 1 & 1 ſunt 2: 1 & 2 ſunt 3: 1 & 3 ſunt 4: attamen nihil auget multiplicando. Nam ſemel 1.2.3. ſunt tantũ 1.2.3. Item 2 ſibi additus eſt 4, quot item efficit ſui multiplicatione. Nam bis bina ſunt item 4. Id in illis eſt proprium. At 2 & quilibet alius deinceps numerus quolibet loco cæteros numeros multiplicat: ut bis 3 ſunt 6, hic ſumo 3 bis, quoties nempe unitas in 2 multiplicante cõtinetur. Denique pro dato multiplicante multiplicãdus additur. Numeri inter ſe multiplicati faciũt eundem: ut quater quina ſunt 20. & quinquies quaterna ſunt itẽ 20. Meditatio autẽ de multiplicandis inter ſe notis tanto accuratius ſuſcipiẽda eſt, quãto majus eſt multiplicationis opus. Itaque puer perdiſcat primo ſingulas notas per ſe multiplicare: bis bina ſunt 4: ter terna ſunt 9: quater quaterna ſunt 16: quinquies quina ſunt 25: ſexies ſena 36: ſepties ſeptena 49: octies octona 64: novies novena 81. Tum ſingularum notarum cum ſingulis multiplicatione ſciat quid efficiatur: ut bis 3 ſunt 6: bis quaterna 8: bis quina 10: bis ſena 12: bis ſeptena 14: bis octona 16: bis novena 18: & ſic in reliquis notis: ſed in majoribus major eſt attentio: ut novies octona ſunt 72: novies ſeptena, ſena, quina ſunt 63, 54, 45: octies ſeptena, ſena, quina ſunt 56. 48. 40. Hanc ſingularum notarum multiplicationem aſſecutus diſcipulus, multiplicationem quamlibet facilem habebit. Hic Pythagoræus multiplicationis abacus eſt. Atqui ſi rudibus majorum notarum aliqua difficilior erit, licebit & hic per partes numerare, ut octies novena,

ſi difficile ſit numerare, addam primo quater 9, deinde ſummam addam ſibi ipſi, id eſt dimidium dimidio ut totum habeam, ſic.

```
   9
   9
   9
   9
 3 6
 3 6
 7 2
```

Quinetiam licebit per partes & hic multiplicare, & particulares ſummas addere, ut 8 per 9 ſic.

```
 2 7
 3 5
 3 5
 1 0
 2 1
   6
 7 2
```

Sed jam majoris & è pluribus notis conſtituti numeri multiplicatio proponatur, & quæratur quis aureorum numerus menſtruo ſtipendio 4 5 6 militum, cũ ſingulis 4 aurei attribuantur. Id aſſequar 4 5 6 per 4 multiplicans. Siniſtrorſum, ut in additione procedam: quia multiplicandi notæ toties addendæ, quoties unitas in multiplicante continetur, & majorem commodius ſuperne collocabo. Deinde multiplicantem per tres multiplicandi notas ſigillatim ducam, & tribus trium ſegmentorum multiplicationibus ſingularibus abſolvam. Numeris igitur ita diſpoſitis, lineaque ut in additione ſubſcripta, ſic incipiam.

```
 4 5 6
     4
```

Quater 6 ſunt 2 4: notabo 4, & 20 reſervabo pro 2 loci ſequentis: talis reſervatio fuit in additione, & hic tanto crebrior, quãto numeratio major eſt: quater 5 ſunt 20, & 2 reſervata, ſunt 22: notabo 2, reſervabo iterum 20 in locum proximum pro 2, quater quaterna ſunt 16, & 2 reſervata ſunt 18, quæ notabo integra: Inductionis ſumma ſic erit.

```
   4 5 6
       4
 1 8 2 4
```

Unde

Undeinveniam 4 5 6 per 4 multiplicatis fieri 1 8 2 4. Hic uidemus inventionẽ, tertii inductionem partium, notarum ſolitudinem & reſervationem. Idem fiet, per partes utriuſque numeri tum multiplicandi tum multiplicantis. Proponatur igitur exemplum paulo plenius, & quidem per partes multiplicantis ſimilibus multiplicandi partibus reſpõdentes, ut 2070 per 204 multiplicentur. Singularis inductio partium componet tandem 4 2 2 2 8 0 hoc modo.

```
      2 0 7 0
        2 0 4
      -------
      8 2 8 0
    0 0 0 0
  4 1 4 0
  -----------
  4 2 2 2 8 0
```

Quo in exemplo, ſicut in cæteris omnibus, circulus per circulum, aut per ſignificantem notam nihil efficit. Circulus tamen pro inventione talis multiplicationis notabitur in principio ad ſequentes notas augendum. At ſi ſit in medio multiplicantis loco, nihil eſt neceſſe: compendio autem numeros in circulum deſinentes multiplicare poſſumus detractis ultimis circulis: deinde iiſdem facto poſtpoſitis: ut ſi multiplicentur 7 2 0 0 per 4 5 0, omiſsis circulis illic duobus, hic uno, multiplicabo 72 per 4 5, & facto 3 2 4 0, poſtponam tres circulos hoc modo, 3 2 4 0 0 0 0. His perceptis nulla multiplicationis numeratio proponi poterit difficilis vel obſcura, quamlibet ea magna ſit: ut ſi multiplicandus ſit 1 2 3 4 5 6 7 8 9 per 7 8 9 factus erit 9 8 6 0 7 4 0 6 5 2 1.

CAP. V. DE DIVISIONE.

Diuiſio eſt, qua diviſor ſubducitur à dividendo quoties in eo continetur, & habetur quotus: unitas minuit numerum ſubducendo, ut tollo 1 de 1, de 2, de 3, manet 0, 1, 2: non minuit tamen dividẽdo. Nam 1 2 diviſis per 1, quotus eſt 12, id eſt 12 unitates quales ſunt in dividendo, & hic diviſus & quotus eſt idem. Diviſis 12 per 12 quotus eſt 1, id eſt pars duodecima: & hic quotus eſt dividendi pars quota cognominis diviſori: ut ſecunda, ſi diviſor ſit 2: tertia, ſi 3: quarta, ſi 4, & ſic deinceps. Atque ut in additione numerus totus, in ſubductione reliquus; in multiplicatione factus, ſic in diviſione quotus cognominis diviſori quæritur, id eſt ſi per 2 dividatur, quid valeat una ſecunda dividendi, ſi per 3, quid tertia, ſi per 4, quid quarta. Diuiſio igitur multiplicationi reſpondet: ſed analogia inverſa: ut enim in multiplicatione unitas eſt ad multiplicantem, ſic multiplicandus eſt ad factum: contra vero in diviſione: ut dividendus ad diviſorem, ſic quotus ad unitatem.

Tres autem diuiſionis termini notantur, diuidendus ſupra, diviſor infra, quotus ad

tus ad latus,ut diuiſis 12 per 4,quotus 3 erit hoc modo.

12
4 (3

Atque meditatio illa,quæ in additionis,ſubductionis, multiplicationis numeratione commendata eſt, eſt hic imprimis commendanda, ut diſcipulus ſciat quem numerum quælibet nota ſingularis,& per quem dividat:Sciet autem per comparationem multiplicationis. Nam ſi numerus faciat numerum per aliquem, factum dividet per eundem. Unitas vero facit omnem numerum per ipſum,& omnis numerus ſeipſum dividit per unitatē: Ergo unitas dividit omnem numerum:Bis quaterna ſunt 8:ergo 2 dividit 8 per 4,& 4 dividit eundem per 2. Quater 5 ſunt 20:ergo 4 dividit 20 per 5, & 5 dividit 20 per 4. Septies 8 ſunt 56: Ergo 7 dividit 56 per 8, & 8 dividit 56 per 7. Octies 9 ſunt 72: Ergo 8 dividit 72 per 9, & 9 dividit 72 per 8, omninoque numerus dividitur per eos numeros per quos factus eſt: qui multos factores habet, habet etiam multos diuiſores: Hic igitur Pythagoræus diuiſionis abacus eſt. Sit exemplum ubi inductione ſit utendum, & quidem dextrorſum, ut in ſubductione. Exemplum erit primū de diviſore toto & integro:dividantur 74 76 per 6,notabo primum dividendum ſupra,diviſorem infra, & ad latus ſiniſtrum, ut immobilis ſemper appareat, quamuis ſingulis in locis, deleatur:ſecus in prolixa diviſione confuſio quædam per errorem memoriæ creari poſsit.

6) 7 4 7 6
6

É 7 poſſum ſubducere 6 ſemel, & manet 1: notabo igitur 1 pro quoto, & deletis 7 dividendo,& 6 diviſore,ſuperſcribam 1.Prima inductio ſic erit.

1
6) ~~7~~ 4 7 6 (1
~~6~~

Secundo producam 6 diviſorem in proximum locum.jam 6 poſſum ſubducere bis á 14,nec amplius,& bis ſenis ſubductis á 14 reſtant 2.Hanc igitur meditatam multiplicem ſubductionem animo reſeruans adnoto primum 2 poſt 1 pro quoto. Deinde ne forte lapſus memoriæ intercidat, aut aliquid aliud offenſum ſit, repeto ab animo depoſitum ſeparatim per multiplicationem, & ſubductionem,& multiplico primo 2 quotum per 6 diviſorem, & reſervatum ac jam refectum ſubſcribo ſub 14,deleoque 6.Secundo ſubduco 12 á 14,& manent 2, quæ deletis 12 & 14,ſuperſcribo. Secunda inductio ſic erit.

~~1~~ 2
6) ~~7~~ ~~4~~ 7 6 (12
~~6~~ ~~6~~
~~1~~ ~~2~~

Tertio

Tertio producam 6 diviſorem in proximum locum 27, unde poſſum ſubduce-re quater ſena, id eſt 24, ut 3 maneant. At factum & reliquum ſervans animo ad notabo 4 poſt 12 pro quoto: Deinde factum repetam eadem multiplicatione 6 per 4, & ſubſcribam 24 deletis 6, tum ſubducam factū 24 á 27, & ſuperſcribam 3 reliquum, deletis 24 & 27. Tertia inductio ſic erit.

```
6) 1 2 3
   7 4 7 6 (1 2 4
   6 6 6
   1 2 4
     2
```

Poſtremo producam 6 in reliquum locum 36, unde poſſum omnino ſubduce-re ſexies ſena, id eſt 36, ut nihil maneat. At in memoria deponens 36 adnotabo 6 poſt 124 pro quoto: Deinde repeto depoſitum, multiplicando 6 per 6, & ſub-jicio 36. Poſtremo ſubductis deletiſque utrinque notis, tota inductio ſic erit.

```
1 2 3
7 4 7 6 (1 2 4 6
6 6 6 6
1 2 4 6
  2 3
```

Hic invenio 7476 in 6 diviſis quotum eſſe 1246, qui hac diviſione expete-batur. Diviſionis igitur opus primo contexitur meditatione multiplicis ſub-ductionis, & adnotatione quoti, ubi jam peracta diviſio eſt, ſed peracta tantum in mentis abaco, ut memoria tanto major hic requiratur, quám antea: Deinde velut ad memoriam & fidem meditationis probandum retexitur, exemplo ocu lis ſubjecto, repetita tum multiplicatione per quotum & diviſorem, tanquam pignora depoſiti: tum facti á dividendo ſubductione. Atqui ſi plures ſint notæ diviſoris, omnes ſimul velut una conſiderantur, & ſubducuntur æqualiter. Cu-juſmodi exemplum ſit de diviſore multiplici, qui per partes ſuas æqualiter ſubducendus ſit á ſuprapoſitis dividendi notis, quoties nempe, continetur. Et hic ſubductionis vera via, quam docui, plane cernitur, cum ſubducere inci-piamus dextrorſum ſingulas ſubducendi notas ante meditando, quam quid-quam de quoto ſtatuatur. Dividantur igitur 144 per 12, poſitis ordine nume-ris hoc modo.

```
12) 1 4 4
    1 2
```

Videbo primum 1 ab 1 ſemel ſubduci, & toties 2 á 4, & 2 reſtabunt: adnotabo

b igitur

igitur 1 pro quoto,& deletis 14 & 12 ſuperſcribam 2. Inductio prima ſic erit.

2
12) 1 4 4 (1
1 2

Secundo producam diviſorem in proximum locũ 24: ac videbo 1 à 2 bis ſubduci poſſe,& 2 à 4 toties,neque quidquam reſtare.Inductio tota ſic erit.

2
12) 1 4 4 (12
1 2
1 2

In prima inductione hujus exempli, ſecunda diviſoris nota ſæpius ſubduci poterat,quam prima:ſit exemplum,ubi prima ſæpius ſubduci poſsit,quam ſecunda, & quidem diviſor ſit majorum notarum. Dividantur 841 coronati ex præda militibus 29.Notabo primo dividendum & diviſorem ſic.

29) 8 4 1
2 9

Ac videbo 2 ab 8 quater quidem ſubduci poſſe, ut primi 20 milites ſinguli capiant 400 coronatos:at reliqui 9 milites clamabũt iniquam partitionem eſſe, neque partem ſibi æqualem relinqui,quia 9 à 4 toties ſubduci non poſsit: poſſum etiam 2 ter ſubducere ab 8, ſed à reliquis 24 non poſſum toties ſubducere 9:ſubducam igitur,ut æqualitas ſubductionis in partibus diviſoris obſervetur,2 ab 8 tantum bis,& à reliquis 44 toties ſubducam 9,& manebunt 26. Itaque ſeruans mente bis 29,id eſt 58,adnotabo 2 pro quoto, & per eum multiplicato diviſore, recolligam quod iſta multiplicis ſubductionis æquatione comprehenderam,& reſtituam 58,quæ deleto diviſore ſubſcribam dividendo,& ab eo ſubducam,manebunt 26,quæ ſubducendo 58, & ſuprapoſito 84 deletis ſuperſcribentur. Inductio prima ſic erit.

2 6
29) 8 4 1 (2
2 9
5 8

Secundo producam diviſorem in reliquum dividendi locum 261. Hic poſſum 2 ſubducere tredecies à ſuprapoſito dividendo 26: Verum ab uno reliquo non

poſſum

poſſum ſubducere 9 toties. Nec omnino fieri poteſt, ut nota diviſoris ulla pluſquam novies hac inductionis via ſubducatur:quia major numerus quã 9, unica nota comprehendi nõ poteſt. Cum vero 2 á 26 novies ſubduxero, à reliquis 81 potero ſubducere 9 toties. Depoſitis igitur in animo 261 adnotabo 9 pro quoto,& per eũ multiplicato diviſore,repetam 261, quæ deleto diviſore ſuperſcribam dividendo, ab eoque ſubducam deletis infra ſupraque, numeris tum ſubductis,tum,unde facta ſubductio eſt,nihil reſtabit.Tota inductio ſic erit.

2 6
29) 8 4 1 (29
2 9 9
5 8 1
2
2 6

Si diviſor primo dividendi loco ſit major, promoveatur in ſecundum locum: ut ſi dividam 252 per 42,non poſſum tollere 42 à 25: promovebo igitur diviſorem in ſecundum locum,& reperiam 6 quotum. Si contingat aliquo poſt primum loco diviſorem majorem eſſe dividendo,circulus in quoto adnotetur. Sic diviſis 608912 per 304 quotus eſt 2003. Quod ſi in relictis in medio ſpatio vacuus locus offendatur,circulus videlicet aſcribendus erit,quod accidet, ſi dividantur 364 in 26,ubi quotus erit 14. jam dividatur quamlibet magnus numerus,ars expoſita ſufficiet:ut ſi dividã illum antefactum numerũ 97407406521 per alterum factorem 789,alter factor quotus erit 123456789. Hoc exemplum & ſimilia majorum notarum mathematicam & Platonis μεταγγοφίν,& Ariſtotelis ἀφαίρεσιν imprimis declarabũt.|Pes bonus, oculus bonus ait tyronibus laniſta: mens bona,memoria bona,manus bona dicat hic arithmeticus diſcipulo: Varietas enim tam multiplicis in una numeratione numerationis erectam mentem & conſtantem memoriam, fidelemque manum maxime omnium requirit. Ac jam nemo ſibi arithmeticæ diſcipulus videatur,niſi ſingulis arithmetici ſtudii diebus diviſionem vel quam maximam poterit, efficiat. Compendia ſunt etiam quædam in dividendo. Si diviſoris prima nota ſit 1,reliquæ circuli, detractis è dividendo ab ultima notis,quot circuli fuerint in diviſore,peracta divisio erit:ſic diviſis 500 per 10 vel 100,quotus erit 50.5.

CAP. VI. DE NUMERO PARI & impari.

E diviſione oritur numeri differentia, imparis & paris, primi & compoſiti. Impar eſt numerus á binario individuus, ut 3.5.7. Par eſt numer⁹ dividuus á 2.ut 2.4.6.8.10.12.14. Itaq; in ꝑpetua ſerie numerorũ 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11. 12.13.14.15,alii ſunt pares,alij impares,quod erat Eratoſthenis cribrũ. Par eſt pariter par vel impariter par. Pariter par eſt par tantũ dividuus á pari per parẽ: ut

4 tantum dividitur á 2 pari per 2 parem. ut 8 tantum dividitur á 2 pari per 4 parem: tales ſunt omnes á binario duplicati:ut 4.8.16.32. 64. Aelianus cap. 8. de re militari ait hunc numerum militiæ cauſſa excogitatum eſſe ad acies commodius permutãdum. Itaque phalangis numerus á Tacticis exoptatur 16384. Par impariter par eſt, par diuiduus etiam ab impari per parem, ut 6 dividitur á 3 impari per 2 parem: ſic 12 dividitur á 3 impari per 4 parem: ſic 30 dividitur á 5 impari per 6 parem.

CAP. VII. DE NVMERO PRIMO *& compoſito.*

ATque hæc numeri prima eſt differentia é diviſione: ſecunda eſt primi & compoſiti. Numerus primus eſt numerus individuus ab alio multitudinis numero: ut 1.2.3.5.7: dividitur aũt unitas per unitatem ſolum, reliqui etiam per ſe: at per alium multitudinis numerũ ſunt individui. Primus etiam dicitur incompoſitus, id eſt á nullo alio multitudinis numero factus. Numerus compoſitus eſt numerus dividuus ab alio multitudinis numero, ut 4 á 2 per 2 dividuus eſt, ut 12 á 3 per 4. Sic in Eratoſthenis cribro 1.2.3.4.5.6.7.8.9. conſiderato primos eſſe 1.2.3.5.7. compoſitos 4.8.9. Numerus autẽ multis modis compoſitus, propterea que etiam dividuus ſæpe ſingulares uſus habet, ubi quærun tur numeri, qui plurimas exactas diviſiones capiant. Sic 96 Archimedes elegit in circuli dimenſione, cuius quotæ partes duodecim ſunt 1.2.3.4.6.8.12. 16. 24.32. 48. 96. Sic aſtrologi 60 partiendis cæleſtium rerum momentis aſſumpſerunt, cujus diviſores ſunt item duodecim, 1.2.3.4.5.6.10.12.15.20.30.60. Itaque ad inveniendum quot numeris numerus ſit diuiduus, theorema tale inventum eſt. Diviſores omnes dati cuiuſcunq; numeri ſunt ab unitate per ſe primi, dividentes quoties poſſunt, & datum & dati quotum, & quoti deinceps quotum quemlibet, deinde compoſiti á primorum ultimo per ultimum, & á ſequenti per utrunque & ab utroque factum, denique á reliquis ſimiliter per ſuperiores omnes: ut, Eſto 482, cujus oporteat omnes diviſores invenire. Primo 1 nihil mutat, ſecundo 2 numerus primus dividet, & quotus erit 231, qui diviſus per 3 deinceps primũ diviſorem dabit 77, qui etiã per 7. primum diviſorem diviſus habebit in quoto 11. Hic habes 1.2.3.7. 11 diviſores dati primos, é quibus inter ſe multiplicatis efficitur. jam ad compoſitos diviſores accedo, & multiplico penultimum 7, per ultimum 11, facio 77. Hic primus ordo ſic eſt.

7. 11. 77.

Secundo multiplico hos tres numeros per 3, & facio hunc ſecundum ordinem.

3. 21. 33. 231.

Tertio multiplico primum & ſecundum ordinem per 2, facioque hunc tertium & quartum ordinem.

2. 14.

2.	14.	22.	154.
6.	42.	66.	462.

Diuiſores itaque dati numeri 462 ſunt addita unitate numero ſedecim,1.2.3.6. 7.11.14.21.22.33.42.66.77.154.231. 462. Hac via numeri civium 5040 à Platone quinto legum quæſiti ad multiplices publicorum munerum functiones dividendum diviſores omnes reperientur undeſexaginta, præter eum ipſum, ut Plato etiam illic admonet. Materies autem exercendi ingenii non mediocris hic erit. Exemplum primum diviſores primos tantum ſemel accepit, hoc accipiet, quoties poterunt, primi ſic erunt.

1	5040
2	2520
2	1260
2	630
2	315
3	105
3	35
5	7

Hic 2 aſſumitur quater, ſæpiusque aſſumeretur ſi poſſet aſſumi, 3 bis aſſumitur, 7 ſemel. Atque hi primi ſunt diviſores, qui inter ſe multiplicati reſtituũt datum: compoſiti ſequuntur, qui & primos una recolligent hoc modo.

		5	7	35
	3	15	21	105
	9	45	63	315
2				
		10	14	70
	6	30	42	210
	18	90	126	630
2				
	4	20	28	140
	12	60	84	420
	36	180	252	1260
2				
	8	40	56	280
	24	120	168	840
	72	360	504	2520
2				
	16	80	112	560
	48	240	236	1680
	144	720	1008	5040

Hic habes undequinquaginta diviſores præter unitatem 1 omnes igitur diviſores in numero Platonico ſunt 60 hoc modo. 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.12.14.15.16.18.20.21.24.28.30.35.36.40.42.45.48.56.60. 63.70.72.80.84.90.105.112.120.126.140.144.168.180.210.240.252.280.315.336.360.420.504.560.630.720.840.1008.1260.1680.2520.5040.

CAP. VIII. DE NVMERIS PRIMIS INTER SE.

PRimus & compoſitus numerus ita eſt, unde differētia oritur primorum inter ſe, & compoſitorum inter ſe: cujus ſingularis eſt utilitas, ut apparebit poſtea in reductionibus & variis inventionibus. Primi inter ſe ſunt numeri communiter individui á multitudinis numero, ut 2 & 3: ut 5 & 6: ut 8 & 9. Primorum inter ſe arithmetica paulo plenior eſt, datorum cognitio eſt per ſubductionem & diviſionem. Si duo inæquales numeri perpetua ſubductione minoris â majore quoties poterit nullum multitudinis numerum antecedētis diviſorem reliquerint, primi erūt inter ſe: ſic 5 & 3 ſunt primi inter ſe, quia ſubductis 3 á 5 manent 2, qui non dividit 3 antecedentem numerum, deinde ſubductis 2 á 3 manet 1, quæ dividit quidem 2 antecedentem, ſed non eſt numerus multitudinis: ſic 27 & 8 ſunt primi inter ſe, quia ſi ſubducas 8 ter: ſubductio enim etiam multiplex aſſumenda eſt, 3 reliquus non dividet 8 antecedētem: tum 3 bis ſubductis ab 8, reliquus 2 non dividit 3 antecedentem: denique ſubductis 2 á 3, reliqua erit unitas ſola. Sic 29 & 21 aſsidua ſubductio explorabit primos inter ſe: ſic 96 & 67, & aſsiduæ ſubductionis exempla ſic erunt.

27	29	96
8	21	67
3	8	29
2	5	18
1	3	11
	2	7
	1	3
		1

Si primus diviſerit datū, erit ad eum primus, ut in 5 & 8, 5 primus nō dividit 8, & primus eſt ad eū. atq; ita ſubductione & diviſione primi inter ſe numeri cognoſcuntur: fiūt etiā additione & multiplicatione. Si duo numeri ſint primi inter ſe, totus ex iis eſt primus ad utrunque, & contra: ut 17 ex 8 & 9 eſt primus ad 8 & 9, & contra cum 17 ſit primus ad 8 & 9, ipſi ſunt primi inter ſe. Hoc additionis eſt. Si duo numeri ſint primi ad tertium, factus ab utroque erit primus ad eundem, ut 4 & 6 ſunt primi ad 7, & 24 ab iis factus primus eſt ad 7. Hinc duo ſequuntur. Primum, Si duo numeri primi ſint inter ſe, factus ab altero per ſe primus erit ad reliquū: ut in 4 & 3: 16 factus á 4 per ſe multiplicato eſt primus ad 3. Secundum, Si bini numeri primi ſint inter ſe facti, ab iis erunt primi inter ſe: ut in 8 9 primis ſigillatim ad 7 & 5, nempe 8 ad 7 & 5. Item 9 ad 7 & 5: facti 72 & 35 ab 8 & 9, item â 7 & 5 ſunt primi inter ſe. Ex his duobus tertium ſequitur. Si duo numeri pri-

meri primi ſunt inter ſe facti & à datis per ſe & à datis deinceps per factos, perpe tuo primi erunt inter ſe, ut hic.

2	4	8	16	32
3	9	27	81	243

Ex hac inventione poſtea deducetur eximia progreſsio continuẽ proportionalium minimorum.

CAP. IX. DE NVMERIS COMPOSITIS INTER *ſe, eorumque communi diuiſore maximo.*

COmpoſiti inter ſe ſunt numeri cõmuniter dividui à numero multitudinis, ut 4 & 6 ſunt compoſiti inter ſe, quia communiter dividui à 2 numero multitudinis: ſic 5 & 10, quia ſunt cõmuniter dividui à 5 numero multitudinis: ſic 7 & 7 ſunt compoſiti inter ſe, quia ſunt communiter dividui à 7 numero multitudinis. Poteſt igitur compoſitorum inter ſe uterque eſſe compoſitus, poteſt alter tantum, poteſt etiam neuter. In arithmetica compoſitorum inter ſe numerorũ duo ſpectãtur, diviſor communis maximus, & dividuus communis minimus. Diviſor communis maximus eſt primus in aſsidua ſubductione dividens antecedentem, ut in 4 & 10: reliquus per aſsiduam ſubductionem 2 erit cõmunis diviſor maximus, quia primus relinquitur antecedentẽ dividens. Hinc conſectarium deducitur. Numerus dividens numerũ eſt maximus amborum cõmunis diviſor, ut in 3 & 3 maximus cõmunis diviſor eſt 3. Nam 3 ſeipſum dividit, & dividit reliquũ 3: Sic in 3 & 6 maximus communis diviſor eſt 3: quia ſeipſum primo, deinde 6 dividit, nec major numerus ternario poteſt dividere 3, propterea que & maximus eſt diviſor in 3 & 6. Idem erit in majore exemplo.

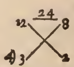
5	6	7
3	4	8
2	1	9
1	2	9
	9	0
	3	9
	1	2
		3

Eadem via quotlibet compoſitorũ maximus cõmunis diviſor invenietur. Nam duorũ præcedentiũ inventus diviſor pro ipſis erat dividuus: inventi itaque diviſoris & proximi cõmunis diviſor, ut antea requiretur: ſic in 4. 6. 8. diviſor communis maximus erit 2: quia cõmunis in 4 & 6 eſt 2, primus nempe reliquus antecedentem dividens: tum in 2 & 8 eſt idem 2: quia dividit 8 majorem: ſic in 9. 15. 21. diviſor communis maximus erit 3: ſic in 12. 20. 28. erit 4: ſic in 18. 24. 30. erit 6. Diviſor autem maximus oſtendit in quoto diviſorem minimum: ſic in 12 diviſor maximus 6 dabit in quoto 2, & compoſitos inter ſe dividens dabit in quotis primos inter ſe, ut in 12 & 8 maximus diviſor utriuſque communis dabit in quotis 3 & 2 primos inter ſe.

CAP.

CAP. X. DE MINIMO COMmuni dividuo.

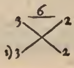
DAti duo numeri per alios multiplicati varios numeros facere poſsũt, ideoque & factos cõmuniter dividere: ſed ex omnibus cõmuniter dividuis minimus modo quæritur, quod fundamentum poſtea futurum ſit permagnæ utilitatis in contractionibus & proportionibus. Diuiduus á duobus minimus eſt factus ab altero per alterius diuiſorem communi diviſori maximo cognominem: ut dividuus á 12 & 8 minimus eſt 24: Nam maximus communis diviſor in 12 & 8 eſt 4, á quo connominati diviſores in 12 & 8, id eſt una quarta utriuſque ſunt 3 & 2. At factus á 12 per 2: vel ab 8 per 3 ſunt 24, communis dividuus á 12 & 8: ab iis enim factus eſt, á minimis, quia factus ab altero per alterius diviſorem maximo communi diviſori cognominem. Exemplum ita eſt.



Sat vero fuerit unum diviſorem cognominẽ inveniſſe: ut hic vel 3 tantum, vel 2 tantum, ut alterna multiplicatione quæſitum numerum repetias. Poſſunt vero dati efficere innumerabiles communiter ab utroque diuiduos, ut 8 multiplicatus per 2.3.4.5.6.7.8.9. facit 16.24.32.40.48.56.64.72: & 12 per 2.3.4.5.6. facit 24.36.48.60.72. é quibus ſunt communes 24.48.72. ut hic vides.

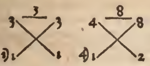
72	72
60	64
	56
48	48
36	40
	32
24	24
	16
12	2

Sed ex iis omnibus nullus erit minor quam 24. Duo conſectaria ſunt ex illa generali inventione communis minimi dividui. Primum, factus á duobus inter ſe primis eſt minimus ab utroque diuiduus, ut 6 factus á 3 & 2 eſt minimus diuiduus ab utroque: exemplum integrum ſic eſſet.



Secundum

Secundum conſectarium eſt. Dividuus ab aliquo eſt minimus ab utroque dividuus: ut 3 eſt dividuus à 3, & communis eſt ab utroque dividuus minimus. Item 8 eſt dividuus à 4, & communis eſt dividuus ab utroque. Exemplum utrunque integrum ſic eſſet.



Ergo hoc duplex compendium eſt è prima propoſitione inveniendi minimi dividui. Eadem via minimus à tribus aut quatuor, aut quotlibet dividuus invenietur. Quia repertus jam minimus dividuus conferendus eſt cum proximo. Nam factus ab altero per alterius diviſorem, maximo communi diviſori cognominē, eſt minimus ab iis dividuus: ſic minimus ab 8. 6. 4. dividuus eſt 24. Nam 24 eſt minimus dividuus ab 8 & 6: rurſum idem minimus diuiſus eſt à 24 & à 4: ut è ſecundo conſectario patet. Sic à 3. 4. 8. minimus dividuus 24: quia minimus à 3 & 4 eſt 12, tum minimus dividuus à 12 & 8 eſt 24. Sic minimus diuiduus ab 1. 2. 3. 4. 5. 6 eſt 60. Hinc ſequitur minimus dividuus à nominibus datarum partium, eſt minimus qui habeat datas partes: ut minimus dividuus qui habeat unam ſecundam, unam tertiam, unam quartam eſt 12, nempe minimus dividuus à 2. 3. 4, quique minimus bifariam, trifariam, quadrifariam dividi poſsit.

CAP. XI. DE NOTATIONE *partium & particularum.*

Numeratio dicta eſt: ſed numeri, cuius partes notationem quandam ſuam & reductionē requirunt, antequam numerentur. Duæ veró notæ tantúm ſunt in alphabeto, notationis huius, linea interjecta ſeparatæ, ſuperior numerus vel numerator: inferior, nomē ſeu nominator appellatur. Sic diviſis 8 per 3 quotus eſt 2, & manent duæ tertiæ, quæ ita notantur $\frac{2}{3}$: & 2 eſt numerus partium, 3 eſt nomen: qua notatione utendum eſt, quoties minor numerus per majorem dividendus proponitur: peracta enim diviſio eſt interjecta linea. Si dividam 12 aſſes 5 fabris: diviſio ſic erit: $\frac{5}{12}$, unde intelligitur ſingulorum partem quotam eſſe 5 uncias. Itaque ſi peracta numeri diuiſione aliquid é diuidendo relinquatur, reliquus numerus interjecta linea ſuperpoſitus diviſori, indicat partes unitatis, quales nempe in dividēdo fuerint, tumque etiam reliqua diuiſio facta eſt: ut ſi diviſerim 5 aſſes 2 bajulis, diuiſio ſic erit $\frac{5}{2}$ (2 $\frac{1}{2}$, unde intelligitur ſingulis 2 aſſes & dimidium aſsis unius cedere. Item ſi 11 aſſes diviſerim tribus, diviſio hæc $\frac{11}{3}$ (3 $\frac{2}{3}$ indicabit ſingulorum quotam partē eſſe 3 aſſes, & duas tertias unius aſsis, id eſt 8 denarios, & ſimiliter in cæteris: ubi in quoto, numerus integer indicabit partes numeri dividendi: partes autem indicabunt partes, non multitudinis,

titudinis,ſed unitatis:hinc patet diviſione legitimè peracta reliquū numerum ſemper eſſe minorem diviſore ſeu nomine: nam ſi numerus eſſet æqualis nomini,ut $\frac{2}{2}\ \frac{3}{3}\ \frac{4}{4}$, eſſet unum integrum:ſi major,ut $\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{4}$, eſſet plus uno integro, diviſorquè & hinc & illinc ſubduci potuiſſet. Quantum verò partium numerus deficit à nomine,tot unius integri partes dividendo deſunt,ut ſemel ab eo diviſor ſubducatur,ut in $\frac{4}{9}$ deſunt $\frac{5}{9}$. Eſt verò in particulis & partibus partium ſua quædam diſtincta notatio,& earum minimæ notantur,ut partes. Reliquæ nulla interjecta linea.Ergo tres quartæ duarum tertiarum unius ſecūdæ ita notabuntur $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}$:ut ſi pater filiòs 2 reliquerit æqua parte cohæredes, tùm filius alter filios 3 æqua item parte patrimonij,ſed primus coemerit alterius fratris partem, deceſſeritquè quatuor filijs ſuperſtitibus,æqualiter item partitis,eorumquè primus coemerit partes ſecundi & tertij, hic nepos haberet ex avita hæreditate $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}$.

CAP. XII. DE REDVCTIOne terminorum.

NOtatio ejuſmodi eſt, ſequitur reductio terminorum vel integrorum partiumque.Reductio terminorum fit ad minimos proportionales terminos, & eſt diviſio terminorum inter ſe compoſitorum per maximum communem diviſorem:ſic $\frac{8}{12}$ per 4 communem maximum diviſorem redeunt ad $\frac{2}{3}$, ſic $\frac{5}{15}$ per 5 maximum communem diviſorem redeunt ad $\frac{1}{3}$. Hæc reductio eſt imprimis neceſſaria,ſi termini partium ſint compoſiti inter ſe: ut antequam numerentur partes, termini reducantur ad primos inter ſe: primi enim ſunt minimi,& minimi ſunt primi.Et quanto facilius eſt parvos quàm magnos numeros numerare,tanto majorem commoditatem numeranti reductio hæc afferet. Itaque tāquam ſolœciſmus in arithmetica fuerit proponere partes in terminis inter ſe compoſitis,aut non protinus reducere,ut $\frac{6}{12}$, $\frac{14}{21}$ pro $\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}$.Eadem reductio etiam per numerationis ſpecies eſt ſpecialis in terminis binarum partium.In additione & ſubductione minimus à nominibus dividuus eſt aſſumendus pro communi nomine & numeri multiplicandi,alterne per partes cognomines,ut hic

$$\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ 3 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{9} \end{array}$$

ubi pro $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{9}$ habes $\frac{6}{9}$ & $\frac{4}{9}$.

In multiplicatione numerus & nomen alternis reducuntur:ut in $\frac{2}{3}\ \frac{5}{6}$ reduces 2 & 6 ad 1 & 3, & multiplicabis $\frac{1}{3}\ \frac{5}{3}$ & facies $\frac{5}{9}$: quia idem eſt multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{6}$, & $\frac{2}{6}$ per $\frac{5}{3}$. Itaq; tanquam $\frac{2}{6}$ rediges ad $\frac{1}{3}$,& pro $\frac{10}{18}$ facies $\frac{5}{9}$.Hic ſi numerus nomini alterno ſit æqualis,reliquus numerus reliquo nomini ſuperpoſitus multiplicationem abſolvit,ut in $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ omiſſis 3 & 3,habes $\frac{2}{4}$,id eſt $\frac{1}{2}$.Quin ſi longa hic ſeries fuerit, æqualibus omnibus omiſſis, reliquus numerus cum reliquo nomine

mine multiplicationem abſolvet, ut hic $\frac{8}{9}, \frac{7}{8}, \frac{6}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ eſt $\frac{1}{9}$. In diviſione numeri inter ſe, vel nomina inter ſe, vel utraque ſeparatim reducuntur: ut ſi $\frac{4}{5}$ dividantur per $\frac{2}{3}$, pro 2 & 4, ſumes 1 & 2, & quota pars erit $\frac{6}{5}$ vel 1 $\frac{1}{5}$. Item ſi dividas $\frac{5}{6}$ per $\frac{4}{9}$, ſumes 2 & 3 pro 9 & 6, & facies $\frac{15}{8}$, vel 1 $\frac{7}{8}$: item ſi dividas $\frac{8}{27}$ per $\frac{4}{9}$, ſumes 1 & 2 pro 4 & 8: & pro 9 & 27, 1 & 3, & quota pars erit $\frac{2}{3}$. Quapropter reductio terminorum ejuſmodi eſt.

CAP. XIII. DE REDUCTIONE INTEgrorum & partium.

REductio integrorum & partium deinceps eſt. Reductio integrorum eſt multiplicatio integrorum per nomen partium: ſic reducere 12 aſſes ad uncias eſt multiplicare 12 per 12, quia uncia eſt $\frac{1}{12}$ aſsis, & fiunt 144 unciæ, vel $\frac{144}{12}$. Reductio partiũ eſt ad integra, vel ad partes. Reductio partium ad integra, eſt partium diviſio per ſuum nomen: ut reducere $\frac{144}{12}$ ad integra eſt dividere 144 per 12, & quotus 12 oſtendit integros aſſes 12. Reductio partium ad partes, eſt ad binas partes proportionales ejuſdẽ nominis, vel ad unas æquales. Reductio partiũ ad binas partes proportionales ejuſdem nominis eſt multiplicatio terminorũ per alternũ nomẽ: ſic $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}$ redeunt ad $\frac{8}{12}\ \frac{9}{12}$: multiplicãdo tũ 2 & 3 terminos $\frac{2}{3}$ per 4, tum 3 & 4 terminos $\frac{3}{4}$ per 3, proportionales autem ſunt $\frac{8}{12}$ datis $\frac{2}{3}$. Nam ſi numerus multiplicet numeros, facti ſunt proportionales multiplicatis, & ſic 8 ad 2 & 12 ad 3 ſunt proportionales, quia æquo majores: facti nempe per eundem. Minora enim ſunt ſimilia & proportionalia æque majoribus, per logicum ſimilitudinis axioma: ſic $\frac{9}{12}$, item proportionales datis $\frac{3}{4}$. Aequalia veró nomina fiunt, quia 3 & 4 inter ſe multiplicantur, ideoqué idem faciunt. Nomina reductione eadem facta ad diviſionem nihil attinent. Nam cúm reduxeris $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ ad $\frac{8}{12}\ \frac{9}{12}$, dicere $\frac{8}{12}$ toties in $\frac{9}{12}$ contineri, nihilo plus eſt, quàm dicere 8 toties à 9 contineri. Itaque nominum inter ſe multiplicatio in diviſione omittitur: ac ſi ſeries reducendarum partium longior fuerit, binæ reducendæ ſunt, ut in $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}$ prima reductione, atque hinc additione facta, habebis $\frac{17}{12}$: quæ cum $\frac{4}{5}$ reductæ ſunt $\frac{85}{60}$, $\frac{48}{60}$. Eadem via reductionis, cognoſcetur è binis partibus inæqualibus utræ ſint majores, ut $\frac{5}{6}$ ſunt maiores quàm $\frac{3}{4}$, quia facta reductione, habebis $\frac{20}{24}$ pro $\frac{5}{6}$: at habebis tantum $\frac{18}{24}$ pro $\frac{3}{4}$. Supereſt reductio partium ad unas partes æquales, quæ particularum variarum reductio eſt, & fit multiplicatione numerorum inter ſe, & nominum inter ſe. Sic $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}$ redeunt ad $\frac{6}{12}$, id eſt $\frac{1}{2}$. Si ſeries longior fuerit, binæ ſunt expediendæ, ut in $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}$, primó facies $\frac{6}{12}$, id eſt $\frac{1}{2}$. Deinde ex $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ facies $\frac{1}{4}$. Idem autem fuerit dicere $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}$, vel $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}$, quia ijdẽ numeri inter ſe multiplicati creant eoſdem. Per hanc particularum reductionem cognoſcis quid ſint particulæ, cúm vides quales ſint partes totius. Eodem compendio partes integrorum cognoſcentur, ut $\frac{2}{7}$ triginta quinque aureorum ſunt $\frac{70}{7}$, id eſt 10 aurei, tanquam quæreretur $\frac{2}{7}\ \frac{35}{1}$.

CAP. XIIII. DE NVMERATIO- *ne partium.*

ATqui partium notatio & reductio ejuſmodi eſt, unde expeditur numeratio primarum & cognominum, & quidem partium tantum, aut partium cum integris permiſtarum. Partium tantum facilis eſt, ſpectat enim tãtum numeros, excepta multiplicatione, quæ tum numeros, tum nomina vel diverſa multiplicat: ſic $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ ſunt $\frac{5}{7}$: ſic ſubductis $\frac{2}{7}$ à $\frac{5}{7}$, reſtant $\frac{3}{7}$: ſic $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{7}$, faciunt $\frac{6}{42}$. Item $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{4}$ faciunt $\frac{6}{20}$, id eſt $\frac{3}{10}$. Sic per $\frac{2}{7}$ dividantur $\frac{10}{7}$, quotus erit 5, ſignificans dividentes partes in dividendis quinquies contineri: ſi nomina diverſa ſint, vulgus etiam putat, perinde diviſionem fieri, ut ſi per $\frac{2}{3}$ dividantur $\frac{3}{4}$, numeros alterius nominibus multiplicant, faciunt $\frac{9}{8}$, at hic non eſt diviſio, ſed reductio ad partes proportionales cognomines, tanquam è $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$, feciſſes $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$, & jam neglectis nominibus (quia numeri tantum hic ſpectantur) proponeres per 8 dividenda 9: tum enim per 8 divideres 9, & quotus eſſet 1 $\frac{1}{8}$. Atque hic factus eſt minor multiplicando, & quotus major dividendo, quod utrunque ex analogia eſt multiplicationis & diviſionis: Unitas enim major eſt multiplicante, multiplicandus igitur erit major facto: Sic inverſè alternando, unitas eſt major diviſore, ergo quotus eſt major dividendo: in diviſione tamen quotus (ut dixi) non ſignificat integra, ſed quoties diviſor contineatur in dividendo. Supereſt numeratio partium cum integris paulo operoſior: Additio nihil mutat, 2 & $\frac{2}{3}$ ſunt 2 $\frac{2}{3}$: 2 $\frac{2}{3}$ & 4 $\frac{2}{3}$ ſunt 7 $\frac{1}{3}$. Sic numeratio libellarum, aſsium, denariorũ, & ejuſmodi efficitur: ut ſi proponantur addendæ libellæ 38, aſſes 178, denarij 147 cũ libellis 23, aſsibus 289, denarijs 268. Primò colligam denarios 415, id eſt $\frac{415}{12}$. Itaque diviſo numero per nomen, habebo aſſes 34 & 7 denarios, notabo denarios 7, & ſerrabo aſſes 34 proximo loco: Deinde additis aſsib. 34 ad 178, & 28, totus erit 501 aſſes, id eſt $\frac{501}{20}$. Nam 20 aſſes faciunt unam libellam: diviſo itaque numero per nomen, habebo 25 libellas, & 1 aſſem: notabo 1 aſſem, & ſervabo 25 libellas, quibus additis ad 38 & 23, habebo libellas 86. Summa deniq; erit additionis hoc modo:

38 l	178 a	147 d
23	289	268
86	1	7

Subductio ex integris capit unum pro tot partibus, quantum eſt nomen: ut ſi à 2 ſubducerem $\frac{2}{3}$, ſumerem 1 á 2, pro $\frac{3}{3}$, & à $\frac{3}{3}$ ſubducerem $\frac{2}{3}$, tum è 2 manebit 1 $\frac{1}{3}$: ſi á $\frac{9}{7}$ tollam 2 $\frac{1}{3}$, reduco 2 ad tertias multiplicando per nomen 3, facio $\frac{6}{3}$, quibus additis cum $\frac{1}{3}$, habebo $\frac{7}{3}$, quibus ſubductis à $\frac{9}{3}$ manent $\frac{2}{3}$: vel reducam $\frac{9}{3}$ ad unitates diviſione numeri per nomen, habebo 3, unde tollam 2, manet 1, & ex 1 reducto ad tertias, id eſt, è $\frac{3}{3}$ tollam $\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. Itaque à $\frac{9}{3}$ ſi tollam 2 $\frac{1}{3}$ manet $\frac{1}{3}$. Si à 2 $\frac{1}{3}$ tollam 1 $\frac{2}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. Subductio permiſtorum ejuſmodi: integrorum cum partibus ſic fieri poteſt, ut antea eſt additio facta, ſed partes ſi excedant

dant unum,commodius autem reducentur ad ſuas unitates diviſione: ut ſi ſub ducendæ ſint 38 libellæ,aſſes 178,denarij 147,è 86 libellis, 1 aſſe, 7 denarijs, reducam primò 147 denarios ad 12 aſſes & 3 denarios. Deinde additis 12 aſsibus ad 178,totus 190 reductus ad libellas,facit novem libellas & 10 aſſes:additis jam 9 libellis ad 38, totus eſt 47.Ita jam denique tollam 47 libellas, 10 aſſes,3 denarios, reſtabunt 38 l. 11 aſſ. 4 d. Subductionis ſumma ſic erit.

38	11	4
86	1	7
47	10	3

Multiplicatio integrorum per partes multiplicat ſubſiciendo uno pro nomine:ſic $\frac{3}{1}$ per $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{6}{3}$,id eſt 2: Integer verò cum partibus per integrum ſolū,vel cum partib. multiplicari poteſt,& ſeparatim & coniunctim. Sic multiplico 7 $\frac{5}{13}$ per 4 $\frac{12}{13}$,prima multiplicatio 7 per 4 facit 28,ſecūda 7 per $\frac{12}{13}$ facit $\frac{84}{13}$,id eſt 6 $\frac{6}{13}$, tertia $\frac{5}{13}$ per 4 facit $\frac{20}{13}$,id eſt 1 $\frac{7}{13}$: quarta $\frac{5}{13}$ per $\frac{12}{13}$ facit $\frac{60}{169}$. Hæc omnia addita ſunt 36 $\frac{60}{169}$:idem facio ſi reducā datos numeros ad $\frac{96}{13}$ & $\frac{64}{13}$ & multiplicando faciam $\frac{6144}{169}$,& diviſione eruam 36 $\frac{60}{169}$. Diviſio etiam poteſt aliquādo ſeparatim fieri:ut ſi per 2 $\frac{2}{3}$ dividantur 5 $\frac{1}{3}$.Primò ſubducam 2 à quinque bis, & manebit 1,id eſt $\frac{3}{3}$,quibus ad $\frac{1}{3}$ additis,habebo $\frac{4}{3}$,unde poſſum etiam bis ſubducere $\frac{2}{3}$. Itaque quotus totus erit 2:at id in diviſione majoris numeri difficilius eſſet,cum non facile videam,utrum diviſor toties in partibus contineatur, quoties in integris: ut ſi per 7 $\frac{5}{13}$ dividam 36 $\frac{60}{169}$:cùm videro 7 quinquies ſubduci poſſe è 36, non video ex 1 reliquo & $\frac{60}{169}$ utrum toties ſubduci poſsit:at per reductionem facilius eſt.

P. RAMI ARITHMETICAE
LIBER SECUNDUS.

CAP. I. DE RATIONUM NOTATIONE *& numeratione.*

Rithmetica ſimplex adhuc fuit, comparatiua ſequitur: quæ interpretatur comparationem numerorum in quantitate & qualitate. Comparatio æqualitatis eſt una & individua: ut 1 ad 1, 2 ad 2, 3 ad 3. Comparatio inæqualium numerorum eſt differentia vel ratio. Differentia eſt comparatio quantum terminus differt à termino: ideoquè ſubductione cognoſcitur: ſic differentia 2 ad 3, & 3 ad 5,& 5 ad 8 eſt 1.2.3. quia cùm ſubduxeris 2 à 3, 3 à 5, 5 ab 8 relinquitur 1.2.3.Ratio eſt comparatio,quoties terminus in termino continetur: ideoquè diviſione cognoſcitur,datàque ratione termini cognoſcuntur contraria multiplica

tione:ſic ratio 3 ad 2 eſt ſeſquialtera,quia 3 continet 2 ſemel & dimidiũ:ſic ratio 5 ad 2 eſt ratio ſuperbitertia,quia 5 continet 3 ſemel & duas tertias:ſic ratio 6 ad 3,eſt ratio dupla, quia 6 continet 3 bis: quoti igitur illi rationum indices ſunt $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{2}{1}$, jam multiplica 1 per 2 nomẽ,& adde 3,erit antecedens ſeſquialterius rationis nomen ipſum 2 conſequens:ſic multiplica 1 per 3 & facto 3 adde 2: 5 erit antecedens,3 conſequens:2 autem duplum ſignificanti ſubjice 1 termini duplæ rationis erunt 2.1. Rationum arithmetica quædam eſt in notatione & numeratione,cúm numerandæ ſunt rationes,antecedens ſuperné, conſequens infernè notatur. Numeratio autem iſta longé diſsimilis eſt ſimplicis numerationis. In eodem enim opere additio & multiplicatio eſt,ſubductio & diviſio:ut in Euclide,Archimede,Ptolemæo,mathematicisq́ antiquis perſpicies. Additio rationum eſt multiplicatio terminorum inter ſe ſimilium,id eſt,antecedentium inter ſe,& conſequentium inter ſe,& compoſitio rationum dicitur, ſic ratio $\frac{1}{1}$ addita rationi $\frac{2}{1}$ eſt ratio $\frac{2}{1}$,quia ratio æqualitatis nil auget, ſic ratio $\frac{3}{1}$ addita rationi $\frac{4}{1}$, eſt ratio $\frac{12}{1}$. Sic ratio $\frac{3}{2}$ addita rationi $\frac{5}{3}$ eſt ratio $\frac{15}{6}$: ſic duplicari, triplicari ratio dicitur,quando rationis bis ac ter poſitæ termini multiplicantur: ſic duplicatur & triplicatur ratio $\frac{3}{2}$,quando termini ita multiplicantur $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{4}$: $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{2}$. ($\frac{27}{8}$. Ergo additio rationum eſt multiplicatio terminorum. Itaque ſi termini rationum ſunt quomodocunque continui,ratio extremorum componetur ex omnibus intermedijs rationibus:ut in 1.2.3.4.5.6.ratio 1 ad 6 componitur ex omnibus intermedijs rationib.ut hîc vides $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ ($\frac{120}{720}$. Nam ratio 120 ad 720 eſt ratio 1 ad 6, ut patet reductione. Hæc ex Euclide arithmetica eſt. Subductio rationũ eſt diviſio terminorum,ut tollatur ratio $\frac{3}{2}$ á ratione $\frac{5}{2}$ relinquetur ratio $\frac{5}{3}$: Hæc utraque numeratio apud Ptolemæum in muſica & aſtrologia additio & ſubductio nominatim appellatur. Quare ſummorum mathematicorum uſus notabilis eſt, ne quis error ex ambiguitate oriatur.

CAP. II. DE GENERIBVS *rationis.*

RAtio inæqualitatis eſt majoris vel minoris. Ratio inæqualitatis majoris nominatur á majore termino,ſed minoris præponendo ſub: ut ratio 2 ad 1, dicitur dupla,1 ad 2 ſubdupla. Ratio eſt prima aut conjuncta. Prima quæ unicam ſpeciem rationis habet,eáque ſimplex eſt aut multiplex. Simplex cum major terminus continet tantum ſemel minorem,& aliquid præterea, ut ratio ſuperparticularis & ſuperpartiens. Superparticularis ratio eſt, quando terminus terminũ ſemel tantum continet,& præterea unam partem:ſi ſecundam, tertiam, quartã, dicitur ſeſquialtera, ſeſquitertia,& ſic deinceps,ut hîc:

3	4	5
2	3	4

Partes veró reliquæ in doctrina rationum demonſtrant non partes unitatis in di-

in diviſo, ut in doctrina partium, ſed partes minoris termini, ut in ratione 3 ad 2, quotus $1\frac{1}{2}$ demonſtrat 2 contineri ſemel in 3, & præterea unam ſecundam eiuſdem 2. Ratio ſuperpartiens eſt, quando terminus terminum continet ſemel, & præterea aliquot partes, ſi duas tertias, tres quartas: quatuor quintas dicitur ſuperbitertia, ſupertriquarta, ſuperquadriquinta: ut,

5	7	9
2	4	5

Ratio multiplex eſt, quando terminus terminum continet ſæpius exactè, ſi bis, ter, quater, ratio dicitur dupla, tripla, quadrupla: ut,

2	3	4
1	1	1

Ratio coniuncta eſt, quæ multas rationis ſpecies continet, ut ratio multiplex, ſuperparticularis, & ratio multiplex ſuperpartiens. Ratio multiplex ſuperparticularis eſt, quando terminus terminum ſæpius continet, & præterea partē unam, ut dupla ſeſquialtera, tripla ſeſquitertia, quadrupla ſeſquiquarta: ut hîc vides,

5	10	17
2	3	4

Ratio multiplex ſuperpartiens eſt, quando terminus terminum continet ſæpius & præterea plures partes, ut dupla ſuperbitertia, tripla ſuperbiquarta, quadrupla ſuperquadriquinta: ut hîc vides,

8	15	24
3	4	5

Sic igitur ſpecies rationis ſubtiliter explicatæ ſunt, & generatim comprehenſæ duabus regulis, altera diviſionis ad ſpeciem, altera multiplicationis ad terminos rationis inveniendum: ac etiam multò breuius ſolis terminis, arithmetica hæc tota de generibus rationum expediri & exerceri poteſt, ut à magnis quoq; mathematicis exercetur: longitudo habitabilis terræ, maior latitudine, quàm 5 ad 3, inquit Ariſtoteles 5. cap. 2. Metheor. Ratio circuli ad diametri quadratum eſt, ut 11 ad 14, inquit Archimedes de dimenſione circuli, pro ratione ſuper bitertia, item pro ratione ſuper triundecima: Itaque ſoli propoſiti termini nomen ſpeciei referent, & quidem in proportionibus, id eſt in ipſo rationum uſu, ubi rationum ſpecies nuſquam appellatur: nomina tamen illa ſpecialia interdum à Mathematicis appellantur: itaque etiam tenenda.

CAP. III. DE PROPORTIONE *Arithmetica.*

SEquitur cōparatio in qualitate numerorū,quæ proportio dicitur,eáq; arithmetica aut geometrica.Proportio arithmetica eſt æqualitas differentiarum: ut in 12.10.8.6: utrobique enim eſt 2 pro differentia etiam inverſè & alternè: ut enim 6 ad 8,ſic 6 ad 12:una enim differentia 2 eſt.Item ut 12 ad 8,ſic 10 ad 6.Differentia enim utrobiq; eſt 4. Proportionis arithmeticæ proprietates duæ ſunt, in diſjunctis primò. Medius ſimuluterque eſt æqualis ſimulutrique extremo,& factus à medijs ſuperat factum ab extremis facto à differentia maximi ſupra medium per ejuſdem medij differentiam ſupra minimum, ut in 12. 10.8.6.10 & 8 ſunt 18,item 12 & 6 ſunt 18:ut factus à medijs eſt 80,qui ſuperat 72 factum ab extremis 8 facto à 4 differentia primi 12 ſupra medium 8 per 2 differentiam ejuſdem medij 8 à minimo 6.Prima proprietas ſuppeditat inventionem mediorū, inter duos datos.Nam ſimulutriuſque dati duæ qualeſcunque partes, ſunt medij arithmeticè proportionales inter datos: ut inter 2 & 10:hîc uides,

	12		
2.	1	11	10.
	2	10	
	3	9	
	4	8	
	5	7	
	6	6	

Secunda proprietas requirit numeros extremos & medios quantitate,non ſolum ordine, ut in 12. 8. 16. 12. 128 factus à medijs non ſuperat 144 factum ab extremis. Ex his duabus proprietatibus diſjunctæ proportionis arithmeticæ duæ aliæ deriuantur in continua.Medius eſt dimidius extremi ſimulutriuſque, & factus à medijs ſuperat factum ab extremis,factum à differentijs: ut in 3.5.7. Nam 3 & 7 ſunt decem,quorum dimidius eſt 5:item 25 factus à 5 in ſe multiplicato ſuperat 21 à 3 & 7,factum 4 facto à 2 & 2 differentijs,2 à 5 & 5 à 7.E' prima proprietate oritur inventio medij ſumpto duorū datorum dimidio.Proportionis arithmeticæ continuæ termini quantumlibet continuari poſſunt,& progreſſio arithmetica vulgò dicitur,& in ea inventio duplex eſt: prima optati eſt termini hoc modo.Si tollatur unitas à nomine termini optati,factúſque à reliquo per differentiam addatur primo termino,totus erit optatus: ut in progreſsione quaternaria ab unitate,ſi quæratur decimus terminus, hic decimus nomen eſt termini,tolles 1 à decem,& à reliquo 9,per 4 differentiam facies 36,quo ad 1 addito,totus erit 37,decimus terminus quaternariæ progreſsionis ab unitate ſic, 1.5.9.13.17.21.25.29.33.37.Secunda inventio eſt ſummæ,ut ſequitur:factus à ſimulutroque extremo per dimidiatum nomen termini ultimi eſt ſumma, ut in proxi-

proxima progreſsione adde 1 & 37, totus erit 38, qui per 5 dimidiatum nomen ultimi termini, facit 190 ſummam. Idem erit factus à nomine ultimi termini, 10 per 19 dimidium ſimul utriuſque extremi. Si paciſcatur cum domino ſeruus annuam ſibi mercedem progreſsione arithmetica, primoque die teruncium unicum, ſecundo quatuor, tertio ſeptem, & ſic deinceps, quæritur anno vertente, quæ ſumma mercedis erit. Primum pro teruncio potes ſumere uncias 3, & facere 3 primum terminum, quære ultimum: quoniam trecenteſimus ſexageſimus ſextus eſt, reperies 1098. Iam ſimul uterque erit 1101, dimidiatum nomen ultimi termini eſt 183, ab ijs factus eſt 201483 unciæ, id eſt libellæ vicenorum aſsium: $839 \frac{123}{240}$, vel 10 aſsium, & teruncii unius.

CAP. IIII. DE PROPORTIONE GEOMETRICA, *deque ejus regula aurea.*

PRoportio arithmetica ſic eſt, geometrica ſequitur, in rationum æqualitate, & hic propriè proportio numerorum, & proportionales numeri dicuntur, ut 3.6.4.8. tùm directè, ut 3 ad 6, ſic 4 ad 8: tùm inverſè, ut 8 ad 4, ſic 6 ad 3: & alterne, ut 3 ad 4, ſic 6 ad 8. Proprietas hîc item duplex eſt, ut in arithmetica proportione, primo in diſjunctis terminis: ut, maximus & minimus reliquis ſunt majores, & factus à medijs æquatur facto ab extremis, ut in eodem exemplo 3 & 8, id eſt 11, majores ſunt 6 & 4, id eſt 10: item 24 factus à 6 & 4, mediis æquatur 24 facto à 3 & 8 extremis: prima tamen proprietas non convertitur ut ſecunda: nec enim verum eſt, ſi quatuor numerorum maximus & minimus reliquis ſunt majores, icci rco proportionales eſſe, quod in ſecunda proprietate perpetuum eſt. Si quatuor numeri ſunt proportionales, factus à mediis, æquat factum ab extremis: & contrà ſi æquat, ſunt proportionales. Hæc proprietas propter admirabilem uſum, vulgo regula aurea dicitur, & certè ſi quid auro pretioſius eſſet, eo quoque nomine digna eſſet. Hinc patet inventio mediorum datis extremis, & quarti tribus datis. Nam diviſor facti ab extremis, & quotus ſunt medij proportionales: ut datis 4 & 3 extremis, factum ab ijs 12, dividens 2 & quotus 6 ſunt medii: item ſi è tribus datis primus dividat factum à reliquis, quotus erit quartus proportionalis: ut è datis 4.2.6. primus 4 dividat, & factum à 2 & 6: quotus 3 erit quartus proportionalis. Quartus autem proportionalis ab exercitatis in arithmetica, ſine aurea regula, frequenter expedietur ex ſola proportionis definitione, præſertim in ſuperparticularibus & multiplicibus: ut ſi quæratur, ut 8 ad 12, ſic 10 ad quem? vel, ut 2 ad 4, ſic 3 ad quem? Illic videbũt ſecundum primi ſeſquialterum eſſe, hîc duplum: ideoque quartum tertio perinde rationalem eſſe, id eſt 15: id eſt 6. Ita ſi quæratur cum imperij vectigal annuum eſt 12, tum Aſia pendit 4: ſi præterea 15 imperētur, quota erit Aſiæ portio? Reſpondebis, 5. nam ut 12 eſt triplus ad 4, ſic 15 triplus ad 5. In ſuperpartiētibus & conjunctis rationibus id minus promptum fuerit. Sed tamen regulæ aureæ uſus per ſeſe immenſus eſt per omnia rationum genera. Eſt enim analogiſmus proportionis in arithmetica, quod ſyllogiſmus argumentationis in logica. Propor-

tio diſjuncta eſt terminis quatuor ſimplex, aut pluribus multiplex. In ſimplicis & directæ quæſtionibus imprimis ſpectandus eſt ordo terminorum: ut nempe primus primo loco ſit, ut cæteri ſuo, primuſque ſit homogeneus tertio, & ſecundus quarto: id enim ſic alternè quæri ſolet, & proportio tractatur commodius: denique tertius ſit qui facit quæſtionem. Itaque ſi confuſius (ut ſolet) quæratur, redigantur in ordinem termini: Ut ſi quæratur quot horæ ſunt in 6 diebus, cùm in 3 ſint 72. Hîc quæſtio eſt tertij termini, quæſtioniſque proportio ſic expedietur: 3 dies ſunt horæ 72: ergo 6 dies erunt horæ 144. Hic primus terminus & tertius ſunt homogenei: ſunt enim de diebus, ſecundus item & quartus: ſunt enim de horis, & tertius facit quæſtionem, quæ quarto proportionali invento ſolvitur. Interdum dantur tres termini, ſed obſcurius, ut ſi quæratur $\frac{3}{4}$, quot ſunt $\overline{12}$? Hic terminos tres habes 4.3.12. Itaque quarto proportionali invento reſpondebis $\frac{3}{4}$ eſſe $\frac{9}{12}$. Idem verò ſit quærere, quot ſunt $\overline{12}$ in $\frac{3}{4}$?

CAP. V. DE EXEMPLIS AUREAE REGULAE, SIMPLI- *cem integrorum numerationem ante requirentibus.*

PRincipem proportionem antecedit, alia quædam modò ſimplex numeratio, modò proportio. Exempla cujuſque generis proponimus: ut aromatum pondo 1000 in Luſitania empta ſunt nummis 10000, proque his vectigal penſitatum nummis 1000: naulum Rhotomagum uſque fuerit 300: ibi deinde vectigal 500: vectura Lutetiam uſque 200: acceſſerit miniſtrorum impenſa 2000: mercator lucrari vult in ſingulas libras 4, id eſt pro tota ſumma 4000? Additis impenſis illis omnibus ſumma erit 18000. Iam dicito: 1000 pondo dant impenſas 18000: ergo 1 dat 18, additionis hoc exemplum eſt. Centum libras emit mercator 10 aureis, vendidit 12, quantum lucri fuiſſet ex aureis 100? Primò videbis ſubducta ſorte à lucro, lucrum 10 aureorum eſſe aureos 2. Tum igitur per regulam auream dicito: 10 dant 2, ergo 100 dabunt 20. Item ſi libra 3 aureis empta venderetur tantum 2, quanta eſſet jactura ex aureis 100? Hic cùm videris per ſubductionem ſortis à jactura, jacturam in 3 eſſe 1: tùm dices per auream regulam 3 perdunt 1: ergo 100 perdunt $33\frac{1}{3}$. Hæc exempla ſubductionis ſunt. Si confundantur res heterogeneæ reducendæ ſunt prius ad idem genus: ut ſi quæratur. Hebdomadæ tres horas habent 504, dies 4 quot horas habent? Hebdomadas 3 rediges multiplicatione 7 ad dies 21: tumque dices, 21 dies ſunt horæ 504: ergo 4 ſunt 96. Item emit mercator doliū vini aureis 8, lucrari vult 2, quanti pintam vendet? Hic rediges dolium ad 288 pintas: tot enim cōtinet: item aureos 8 emptionis, & 2 lucri, id eſt 10, ut pretium utrunque conjungas, rediges ad denarios 6240, cùm aureus ſit aſsium 52. Tùm dices per auream regulam, 288 pintæ valent denarios 6240: ergo 1 pinta valet $21\frac{192}{288}$, id eſt $\frac{2}{3}$: ſed hic additio eſt & multiplicatio, ut in tribus exēplis proximis. Commuta 3 aureos in aſſes, ſemiſſes, quadrantes, æquali ſingulorum generum numero, quot aſſes, quot ſemiſſes, quot quadrantes dabis? Commuta 3 aureos in aſſes, id eſt in $\overline{52}$ habebis 156: deinde aſſes in minimam propoſitarum monetam, ut in quadrantes, habebis 624.

bis 624, quales aſsis valet 4, ſemiſsis 2, quadrans 1. Hi valores 4.2.1. additi ſunt 7: unde proportio concludetur, 7 continet ſemel ſingula quæſita genera: ergo 624 continent octogies novies cum $\frac{1}{7}$, adde ſingula hæc genera, ſumma aſsium redibit. Termini proportionis ita ſunt 7.1.624.897. Emo 4 aureis æquali numero libras piperis, zingiberis, amygdalarũ, ſaccari, quot é ſingulis generib. libras habebis? redige ut antea, aureos ad aſſes 208, túm vide quantũ ex ijs aſsib. valeat libra ſingulorum generũ: ut libra piperis 25, zingiberis 25, amygdalarũ 5, ſaccari 12, pretijs his additis, totus eſt 67, jam proportionem conclude, 67 aſſes dant 1 libram ſingulorum generum: ergo 208 dant $3\frac{8}{87}$. Hæc ſi multiplices pretijs ſingulorum generum inventum numerum reſtitues 208 aſſes. Pauló diſſimile eſt proximum, in quo duo termini proportionis primi comprehenduntur propoſita ſpecie: ut ad quem numerum 12 eſt duplus ſuperbipartiens quintas? Hic pro duobus rationis terminis habes ſpeciem, quæ ita picta $2\frac{2}{5}$, multiplicatione quoti integri per nomen, & additione numeratoris reſtituet 13 pro antecedente, 5 autem pro conſequente, & termini proportionis tres ſic erunt: 13.5.12. am regula aurea invenies pro quarto $4\frac{8}{13}$. Aliquando eſt multiplicatio & ſubductio: ut Curſores 2 Lutetia Romam contendunt, ſed primus 20 millia paſſuum quotidie conficit, ſecundus 33, primus 6 diebus præceſſerit, quando ſecundus aſſequetur? Hîc intelligis quotidie ſecundo tantundem conficiendum eſſe, quantum primus conficiat, & præterea 13. imprimis igitur collige per multiplicationem jam confectum iter, habebis 120 millia, tum ſume 13 exuperantiam ſecundi, & dic: Secundus conficit 13 millia uno die ſupra primum, idem 120 millia, quot diebus ſupra eundem conficiet? proportio ſic eſt, 13. 1.120.$9\frac{3}{13}$. Diviſio etiam antecedere poteſt, ut 1 dolium valet 4 coronatos, pintæ 2592, quantum valebunt? reduces pintas 2592 ad 9 dolia dividendo, nempe 2592 per 288, quæ 1 dolium faciunt, & tunc alterni termini erunt homogenei, regulaque aurea tum ſic erit, 1 dolium valet 4 aureos: ergo 9 dolia valebunt 36 aureos.

CAP. VI. DE EXEMPLIS AUREAE REGULAE, *ſimplicem fractorum numerationem ante requirentibus.*

Atque hæc exempla integrorum numerorum fuerunt: ſequentia ſunt fractorum. Perſolveris æris alieni $\frac{1}{3}$, deinde $\frac{1}{4}$, & reſtent decem aurei, quantum erat totum æs alienum: additæ partes ſunt $\frac{7}{12}$, reliquũ igitur eſt $\frac{5}{12}$: unde quæſtionis proportio concluditur: 5 valent 10 aureos, ergo 12 valent 24. Turris $\frac{1}{3}$ in terra latet, $\frac{1}{4}$ demergitur ſub aqua, reliqua pars 60 cubitis ſupra aquam eminet, quot igitur cubiti in terra? quot in aqua? Partes additæ ſunt $\frac{7}{12}$, reliquum igitur $\frac{5}{12}$ valent 60, unde concludes:

	4	48
5 valent 60: ergo		
	3	36

Talis eſt quæſtio duplex Græcorum epigrammatum, primi de ſtatua Palladis.

Pallas ego ſum malleata,ſed aurum
juvenum eſt,donum poetarum.
Dimidium quidem auri Chariſius,octauam autem
Theſpis,& decimam partem poſuit Solon,
Sed vigeſimam Themiſon,reliqua veró talenta
Novem,& ars,donum Ariſtodici: Quantum ſinguli contulerunt?

Adde partes,habebis $\frac{31}{40}$. Itaque reliqua 9 ad complendum totum,valent 9 propoſita.Hic accidit eundem eſſe numerum propoſitum, & reliquum, ut quartus ſit æqualis tertio.Summa itaque eſt 40. Chariſius ergo contulit 20: Theſpis 8: Solon 4: Themiſon 2.In proximo epigrammate res alia eſt.

Augeam interrogavit magna virtus Alcbidæ
Multitudinem armentorum quærens,ipſe veró reſpondit:
Circa quidem Alphei fluvium, amice,dimidium quidem horum:
Pars autem octava collem Saturni circumpaſcuntur.
Duodecima autem ſeceßit Taraxippi ad montem.
Circa veró Elidem divinam vigeſima paſcuntur.
Verum in Arcadia trigeſimam reliqui.
Reliquos autem videto greges,ſic quinquaginta.

Quanti igitur erũt greges ſinguli? additæ partes ſunt $\frac{95}{120}$: Reliqua igitur 25 ad explendũ totum valẽt 50: ergo 120 valent 240. Itaque $\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{20}\ \frac{1}{30}$ ſunt 120: 30.20.12.8: fractorum veró numerorum numeratio paulo operoſior eſt in terminis proportionis: ut, Unius moletrinæ tres molæ molunt 12 horis modios, prima 18, ſecunda 13, tertia 8, quot horis univerſæ molent modios 24? & quantum ſingulæ? adde primum 18.13.8, habebis 39. prima quæſtio ſic erit: 39 modii moluntur 12 horis: ergo 24 moluntur $\frac{96}{13}$, id eſt horis $7\frac{5}{13}$. Hic antecedit unica additio: at in tribus quæſtionibus de tribus molis intercurrunt partes, in quibus vitandæ moleſtioris numerationis gratia pro $7\frac{5}{13}$, aſſumes $\frac{96}{13}$: ſingulæ igitur quæſtiones ſic erunt. Prima mola molit 12 horis 18 modios: ergo $\frac{96}{13}$ molent $11\frac{12}{13}$. In ſecunda & tertia dicito, 12 dant 13: ergo $\frac{96}{13}$ dabunt 8: item 12 dant 8: ergo $\frac{95}{13}$ dabunt $4\frac{12}{13}$.

CAP. VII. DE EXEMPLIS AVREAE REGVLAE, PRO*portionem antecedentem requirentibus.*

PRoportionis antecedentis principem proportionem ſequentia deinde exempla erunt, & primum de proportione arithmetica antecedente. Putearius quidam puteum brachiorum 34 redemit effodiendum libris 60 cum victu geminarum operarum. Effoſsis autem brachijs 20, ægrotare cœpit, mercedemque debitam rogavit, quanta igitur ea eſt? Hic victus nihil variat, ſed arithmeticæ progreſsionis uſus hic eſt ante proportionis geometricæ concluſionem. Nam

ſecundum

ſecundum brachium, laborem primi feré continet, & tertium utriuſque, & ſic deinceps arithmetica gradatione labor creſcit: Itaque ſumma integræ progreſſionis 34, brachiorum eſt 595: & ſumma progreſsionis 20 brachiorum, eſt 210. Jam ad proportionē conclude: ut 595 ad 60: ſic 210 ad 21 $\frac{105}{595}$, vel $\frac{3}{17}$. In ſequentibus exemplis geometrica proportio antecedit cum numeratione ſimplici aliqua. Curſor Lutetia Lugdunum 5 diebus pervenit, curſor alius velocior Lugduno Lutetiā idem iter conficit, diſcedant hodie meridiano tempore, quando & ubi inter ſe occurrent? Præpone proportiones antecedentes, ſic. Primus 5 diebus totū iter conficit: Ergo uno die cōficit $\frac{1}{5}$ itineris. Secundus 3 diebus conficit iter: ergo uno die conficit $\frac{1}{3}$ itineris. Hæ partes additæ ſunt $\frac{8}{15}$ itineris, unde tota proportio concluditur, $\frac{8}{15}$ itineris conficiuntur 1 die: ergo $\frac{15}{8}$, id eſt 1 conficitur $\frac{15}{8}$ diei, id eſt 1 die, & ſequentis $\frac{7}{8}$, hoc tempus eſt concurſus, id eſt perendie nona matutina: Ubi proportio duplex & additio partium unica antecedit: in ejuſmodi autem exemplis, ubi totum & integrum ſcriberetur, ut $\frac{15}{15}$, commodius erit aſſumere 1, quia $\frac{15}{15}$ reductæ nihil aliud ſunt, quām 1. Reliqua autem quæſtio deinde facilior eſt. Primus 5 diebus conficit 1: ergo $\frac{15}{8}$ diei conficiet $\frac{15}{40}$ itineris, id eſt $\frac{3}{8}$. Secundus conficit 3 diebus 1. Ergo $\frac{15}{8}$ cōficit $\frac{15}{24}$, id eſt $\frac{5}{8}$. Locus igitur cōcurſus erit ad $\frac{3}{8}$ itineris á primo cōfecti, & ad $\frac{5}{8}$ á ſecūdo confecti. E' duob. architectis prim' abſolveret ędificiū 20 dieb. cū ſecūdo abſolveret 14: quot igitur diebus ſecundus ſolus abſolveret? Dicito primū 20 dies abſolvūt 1, id eſt totū: ergo 14 abſolvet $\frac{14}{20}$, id eſt $\frac{7}{10}$. Itaq; ſecūdus abſolvit 14 diebus $\frac{3}{10}$, jam conclude, $\frac{3}{10}$ fiunt 14 diebus. Ergo 1 fit diebus 46 & $\frac{2}{3}$ diei, id eſt horis 16. E' quatuor architectis ædificium totum abſolveret primus 1 anno, ſecundus 2, tertius 3, quartus 4: Si omnes ſimul adhibeantur, quanto tempore abſolvent? Secundus 2 annis abſolvit totum opus: ergo uno anno abſolvet $\frac{1}{2}$ operis, tertius $\frac{1}{3}$, quartus $\frac{1}{4}$: adde jam ſingulorum opus 1 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$, habebis $\frac{25}{12}$: unde concludes de architectis quatuor, $\frac{25}{12}$ fiunt 1 anno: ergo 1 fiet $\frac{12}{25}$ unius anni, id eſt 5 mēſibus, & $\frac{19}{25}$ unius menſis. Hic triplex proportio antecedit, & partium triplex additio. Talia ſunt exempla duo ſequentia. Leofontis quatuor fiſtulas habet, quarum prima implet ſubjectum lacum 24 horis, ſecunda 36, tertia 48, quarta 6: ſi ſimul fluant, quot horis implebunt? facito proportiones antecedentes, 24 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{24}$ lacus: 36 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{36}$ lacus: 48 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{48}$ lacus: 6 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{6}$ lacus. Adde jam partes impleti lacus 1 hora, habebis $\frac{37}{144}$, quales 144 totum faciūt. Dices igitur 37 partes lacus implentur 1 hora. Ergo 1 impletur $\frac{144}{37}$, id eſt 3 horis, & $\frac{33}{37}$ unius horæ. Hic antecedit proportio quadruplex & additio partium triplex. Proximum exemplum facilius etiam eſt.

Lacus fontis tres fiſtulas habet, quarum prima vacuat lacum $\frac{1}{4}$ horæ, ſecūda $\frac{1}{2}$, tertia hora 1, quanto tempore fluentes ſimul omnes vacuant lacum? Dices hic ut antea: $\frac{1}{4}$ horæ vacuat ſemel, ergo 1 hora vacuat quater: item $\frac{1}{2}$ vacuat bis: 1 hora ſemel: adde has vices, habes 7, & dicito. Lacus vacuatur ſepties 1 hora:

ergo vacuatur ſemel $\frac{1}{7}$ horæ: termini ita ſunt 7. 1. 1. $\frac{1}{7}$. Hic antecedit proportio triplex, ſed ſimplex additio eſt, & integrorum. Duo exempla reliqua breviora & faciliora ſunt.

E duobus architectis primus abſolveret 30 diebus, ſecundus 40: tertio autem addito 15 diebus abſolvunt, quot diebus tertius ſolus effeciſſet? Primus 30 diebus abſolveret totum ædificium. Ergo 15 diebus abſolvet $\frac{15}{30}$ ædificii, id eſt $\frac{1}{2}$. Secundus abſolveret 40 diebus 1: ergo 15 diebus abſolvet $\frac{15}{40}$, id eſt $\frac{3}{8}$: adde jam $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$ habebis $\frac{7}{8}$, quibus ſubductis ex $\frac{8}{8}$, reſtat $\frac{1}{8}$, quam tertius eſt effecturus illis 15 diebus. jam denique dicito, $\frac{1}{8}$ conficitur 15 diebus: ergo 1 efficitur 120 diebus. Hic antecedit proportio duplex & ſubductio partium una, ut in proximo.

Fons duas fiſtulas habet, prima implet lacum horis 4, ſi ſola fluat, ſecunda vacuat horis 11, ſi illa obſtructa ſit: ſi unà fluant, quot horis implebitur lacus? Diſtinguito proportiones antecedentes & dicito: 4 horæ implent lacũ, ergo 1 hora implet $\frac{1}{4}$ lacus: deinde 11 horæ vacuant lacum: ergo 1 hora vacuat $\frac{1}{11}$ lacus. jã ut ſola impletio maneat, tolle $\frac{1}{11}$ ab $\frac{1}{4}$, reſtabũt $\frac{7}{44}$ lacus, quæ implentur 1 hora: unde quæſtionis proportio concludetur: $\frac{7}{44}$ lacus implentur 1 hora: ergo 44 implentur $\frac{44}{7}$ horæ, id eſt 6 horis, & $\frac{2}{7}$ unius horæ.

CAP. VIII. DE RECIprocatione.

PRoportio ſimplex directa ſic eſt: plerunque autem reciprocè invertitur: Proportio reciproca eſt, quando eſt ut primus terminus primæ rationis ad primum terminum ſecundæ: ſic ſecundus terminus ſecundæ eſt ad ſecundum primæ: ubi homogeneorum tantum ratio ſumenda eſt, ut potentiarũ inter ſe, temporum inter ſe, pretiorum inter ſe, menſurarum inter ſe: tumque de terminis reciprocæ proportionis tertius quæritur. Itaque factus ab extremis diviſus per datum è mediis alterum dabit reliquum in quoto. Hac proportione utendum eſt quoties auctis vel minutis momentis res contrà minuũtur, vel augentur, pro ratione potentiæ, temporis, ponderis, pretii, menſuræ. Quod diligenter animadvertendum eſt, ne periculoſo errore directa proportio pro reciproca concludatur: quod facilius è numeratis rebus animadverti poteſt, quàm ex ipſa numerorum natura. Sed res exemplis intelligatur: ut ſi quæſtio ſit de aratione 10 jugerum, & dicatur, 15 boves arant 8 diebus: ergo 20 boves arabunt 6 diebus. Exemplum quæſtionis & concluſionis ſic erit, ut reciprocatio cernatur.

15	20
8	6

Eadem proportio inverſo terminorum ordine concluditur ſic, 6. 15. 8. 20: ubi de tribus datis terminis ultimo loco prolatus erit primus, primo loco propoſitus erit ultimus: quæſitus autem erit tandẽ proportionis inverſæ ultimus. Atqui in hoc exemplo & ſimilibus omnibus terminis idem ſæpius iteratus rejiciẽdus eſt, ut

eſt,ut hic 10. Atque ſic termini in reciprocatione homogenei faciunt rationem, boves nempe primæ cum ſecundis faciunt primam rationem,ſecundi dies cum primis faciunt ſecundam. Hujus inverſionis iſotropicum illud eſt Ariſtoteli 10. cap.8. Phyſ. Si potentia ſit in quodam tempore tanta, major erit in minore κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν τῆς ἀναλογίας, ſecundum converſionem proportionis:item 1 cap.1. de cælo, Proportionem quam habent pondera,tempora ἀνάπαλιν,id eſt, inverſo modo habebunt:ut ſi dimidium pondus in tali,duplum in dimidio hujus. Hic analogiam τὴν ἀνάπαλιν appellat, quam illic appellavit τὴν ἀντιστροφὴν τῆς ἀναλογίας. Pondera motib. ſunt reciproca:ait Jordanus 1 p. de ponderib. Iſorropicũ Ariſtotelis theorema imitatus,& ſic Archimedes. Si põdera ſunt æquipondia,ſunt reciproca radijs:ſic Campanus citat à Boetio,ſi nervus ſecetur in cithara, ſegmenta ſonis eſſe reciproca. Verum eſto Ariſtotelea proportio. Pondus 20 librarum deſcendit horis 2:pondus igitur 40 librarum deſcendit 1 hora. Proportionis termini ita ſunt.

20   40
2   1   ubi ſicut antea facit reciprocas rationes ex homogeneis rebus,primam è ponderibus 20,& 40:alteram ex 1 hora,& 2. Amphora vini una ſufficit 3 dies 30 convivis,eadem 6 dies,quot convivis ſufficiet? Termini proportionis ita ſunt.

3   6
30   15.

Commeatus ſuppetit 7 menſes,3000 obſeſsis militibus: 12 menſes quot obſeſsis ſuppetet? Termini proportionis ita ſunt.

7   12
3000   1750

Cùm modius tritici vænit 5 aureis,tum panis eſt 4 unciarũ: ergo cùm vænit 3,panis erit unciarum $6\frac{2}{3}$: ſic $\frac{6}{4}$. 5. $6\frac{2}{3}$

Tres mercatores lucrati ſunt tricenos aureos, primus per 6 menſes ex aureis 60,ſecundus per 7,tertius per 5,ex quanam uterque ſorte? Hic 30 communis eſt terminus. Itaque rejiciendus,& tantum conſiderandum,ad lucrum commune 6 menſes occupant 60 aureos:ergo 7 minus occupabunt, & 5 menſes plus occupabunt. Termini ſic erunt.

6.   7.   5.
60. $51\frac{3}{7}$.   72.

CAP.

CAP. IX. DE COMPOSITA PROPORtione per additionem.

HActenus proportio ſimplex fuit in quatuor terminis: ſequitur multiplex, ubi termini plures quatuor uſurpantur: idque compoſitione vel continuatione. Compoſitio terminorum eſt prima aut ſecunda: prima ut additio & alligatio. Additio eſt, cùm termini datæ proportionis adduntur: eſtque triplex, prima eſt additio antecedentis cum conſequente ad conſequentem: ut 4 ad 3, ſic 8 ad 6: ergo ut 7 ad 3: ſic 14 ad 6. Secunda eſt additio complurium antecedentium ad unum conſequentem, vel unius antecedentis ad plures conſequentes: ut 2 ad 4, ſic 3 ad 6: & 8 ad 4, ſicut 12 ad 6: ergo 10 ad 4, ſicut 15 ad 6: item ut 6 ad 2, ſic 9 ad 3, & ut 6 ad 4, ſic 9 ad 6: ergo ut 6 ad 2 & 4, ſic 9 ad 3 & 6. Hæc utraque compoſitio frequentior eſt in demonſtrationibus ſcholaſticis, quàm in populari uſu. Prima tamen frequentior: ſecunda ad 31 p 6. adhibetur ad inſignem imprimis demonſtrationem, ut ab Archimede ad circuli dimenſionem. Tertia eſt additio omnium antecedentium ad omnes conſequentes, ubi dantur conſequentes quidem additi, antecedentes autem ſeparati, tumque antecedentes omnes adduntur, & ſeparati ad omnes conſequentes concluduntur. Itaque ſola hic fit additio antecedentium ad primum proportionis terminum conſtituendum. Hæc compoſitio utilitates infinitas habet, & propter quotidianum uſum, in conſortio & ſocietate hominum, vulgò regula ſocietatis appellata eſt, ſed verius æquitatis & politiæ regula diceretur: & certè velut dea quædā juſtitiæ & æquitatis ſuum cuiq; partitur, ac tribuit. Quapropter nobilitas tanta exemplis ſuis illuſtretur.

Duorum ſociorum primus contulit aureos 8, ſecundus 6, unde lucrati ſunt aureos 7, quantū ſingulis accedit? Quæſtio additis antecedētibus ita ſolvetur.

14 dant 7: ergo	8	4
	6	3

& contra ſors concluditur:

7 dant 14: ergo	4	8
	3	6

Hic & deinceps tertius terminus datur poteſtate, non actu, quod antea initio regulæ aureæ admonitū eſt. Tres mercatores contulerunt aureos, primus 90, ſecundus 60, tertius 50, lucrati ſunt aureos 100, quantum ſingulis accedit? Adde antecedentes, ut antea, & conclude.

	90	45
200 dant 100: ergo	60	30
	50	25

Contrà

Contrà ſingulares ſortes ex additis conſequentibus concludentur.

	45	90
100 dant 200:ergo	30	60
	25	50

Aurei 200 tribus ea conditione partiẽdi, ut primus triplo plus habeat quàm ſecundus, & ſecundus quadruplo quàm tertius, quota pars erit ſingulorum? Hic ab extremo incipe. Si tertius habeat 1, ſecundus habebit 4, & primus 12, quibus additis conclude.

	12	$141\frac{3}{17}$
17 dant 200:ergo	4	$47\frac{1}{17}$
	1	$11\frac{13}{17}$

Hæc exempla ſpeciem quandam juſtitię habuerunt, ſequentia longè ſunt inſigniora, in quibus judex in tribunali ſine compoſitionis hujus æquitate ſit iniquus: Octo creditoribus debentur aurei, primo 100, ſecundo 86, tertio 75, quarto 60, quinto 54, ſexto 32, ſeptimo 24, octavo 15. Sed bona debitoris tantummodo valent aureos 150. Itaque omnibus omnino ſatisfieri non poteſt. Ac ſi totam ſummam primo ſummo jure perſolveris: ſummam cæteris injuriam facies. Secundo enim 36 detrahes, nihil cæteris prorſus relinques. Ad compoſitionis igitur æquitatem recurretur, quantum ſingulis pro rata bonorum portione perſolvendum ſit, ex additis antecedentibus ita concludes:

	100	$33\frac{141}{223}$
	86	$28\frac{106}{223}$
	75	$25\frac{50}{223}$
446 dant 150:ergo	60	$20\frac{117}{223}$
	54	$18\frac{38}{223}$
	32	$10\frac{170}{223}$
	24	$8\frac{16}{223}$
	15	$5\frac{10}{223}$

Hæreditas 3000 relicta 5 fratribus ea conditione, ut obveniat primo $\frac{1}{2}$, ſecundo $\frac{1}{3}$, tertio $\frac{1}{4}$, quarto $\frac{1}{5}$, quinto $\frac{1}{6}$. Id uti proponitur fieri nõ poteſt, quia é datis partibus prima aufert 1500, ſecunda 1000, tertia 750, quod jam plus eſt toto. Itaque cæteris nihil relinqueretur. Atque ex illo ſummo jure ſumma item fieret injuria. Recurratur igitur ad compoſitæ proportionis æquitatem, & numerus inveniatur minimus dividuus á datis partibus. Hic enim eſt uſus talis numeri, quoties datæ partes totum ſuperant, & inventi partes inveniantur datis illis cognomines, quæ æquabiliter 5 fratribus aſſem partiantur. Id veró per additionẽ partiũ abſq; minimo dividuo fieri poteſt, ſed expeditior erit numeratio per integros numeros dividui minimi beneficio repertos. Minimus igitur dividuus á datis partibus eſt 60, cujus partes partibus illis datis cognomines, ſunt 30. 20. 15. 12. 10. Has igitur partes adde, & dic per auream regulam.

	30	$1034\frac{42}{87}$
	20	$689\frac{57}{87}$
87 dant 3000: ergo	15	$517\frac{21}{87}$
	12	$413\frac{69}{87}$
	10	$344\frac{72}{87}$

Tres partiũtur 100, ea conditione, ut primus capiat $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, ſecundus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, tertius $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$. Id item ſicuti proponitur fieri non poteſt, quia primus & ſecundus auferunt plus toto. Aequitas igitur additionis adhibeatur. Itaque ſumes primo minimum dividuum 60, cujus diviſores datis partibus cognomines, ſunt 20 & 15 pro primo, 15 & 12 pro ſecundo, 12 & 10 pro tertio, quibus primum ſeparatim additis ſunt 35. 27. 22. Deinde ſimul ſunt 84. Conclude igitur:

	35	$41\frac{2}{3}$
84 dant 100: ergo	27	$32\frac{1}{7}$
	22	$26\frac{4}{21}$

Conſimile eſt exemplum conſequens, ſed pauló plenius, & luculentius. Quatuor ſic partiũtur 600 aureos, ut primus habeat $\frac{2}{3}$ & 9 aureos, ſecundus $\frac{1}{3}$ & 8, tertius $\frac{1}{6}$ & 7, quartus $\frac{7}{8}$ & 6. Hic item partes duæ primæ ſuperant totum, neque quidquam cæteris præterea relinquitur. Ad illud igitur proportionalis æquitatis judicium refugiamus, & quinque in hoc exemplo ſuperiorum diſsimilia diſtinguamus. Primo á nominibus propoſitarum partium aſſumẽdus minimus

divi-

dividuus eſt, ſic erit 120. Secundo partes cognomines inveniendæ. Tertiò inventæ per ſuos numeros multiplicandæ Itaq; $\frac{2}{3}$ erunt 80: $\frac{3}{5}$ 72: $\frac{5}{6}$ 100: $\frac{7}{8}$ 105: quæ additæ erũt pro antecedentibus additis. Quartò à 600. ſumma dividenda tollantur integri numeri. 9. 8. 7. 6. id eſt 30, manebunt 570 pro additis conſequentibus. Quintò denique inventis quartis proportionalibus, addes primo 9, ſecundo 8, tertio 7, quarto 6. Totum exemplum ſic erit.

	80	136 $\frac{261}{357}$
357 dant 570: Ergo	72	122 $\frac{342}{357}$ vel $\frac{114}{119}$ per 3
	100	166 $\frac{237}{357}$ vel $\frac{79}{119}$ per 3
	105	173 $\frac{231}{357}$ vel $\frac{11}{17}$ per 21.

Triplici verò additionis compoſitioni triplex ſubductionis diviſio poteſt opponi. Prima eſt ſubductio differentiæ antecedentis à conſequente: ut 7 ad 3, ſic 14 ad 6: ergo ut 4 ad 3, ſic 8 ad 6. Secunda eſt ſubductio ſimilis ablati: ut 12 ad 2, ſic 18 ad 3. ergo ut 8 ad 2, ſic 12 ad 3: itemque ut 4 ad 2, ſic 6 ad 3: utrobiq; enim tollitur ſubſeſquialterum. Tertia eſt ſubductio differentiæ antecedentis ab antecedente ad differentiã conſequentis à conſequente: ut 12 ad 9, ſic 8 ad 6: ergo ut 12 ad 9, ſic 4 ad 3. Poſtremę diviſionis hujus in ſcholaſticis demonſtrationibus uſus eſt permagnus & his verbis. Si fuerit ut totus ad totum, ſic ablatus ad ablatum, erit ut totus ad totũ, ſic reliquus ad reliquũ: uſus tamen vulgaris non perinde hic patefactus eſt. ἀναστροφὴ id eſt inverſio additur, quæ eſt ſubductio antecedentis ad ſuam differentiam ſupra conſequentem: ut 6 ad 4, ſic 3 ad 2, ergo ut 6 ad 2, ſic 3 ad 1. Hujus diviſionis exẽpla in demõſtrationibus aliquãdo reperies.

CAP. X. DE ALLIGATIONE.

Alligatio eſt variorum generum permiſtio, unde medium temperatur: ut in granis, liquoribus, metallis, pretiis, ponderibus, menſuris, omnibuſq; rerũ, quæ quidem miſceri, temperarique poſsint, generibus: In rebus autem phyſicis mirabiliter excellit hæc ſpecies compoſitionis altera, ut ſuperior excelluit in politicis. Per ſe vero alligatio nulla eſt proportio, ſæpè tamẽ proportione utitur, & quidẽ ſæpè ſuperiore proportiõis additione. Alligatio eſt medii quæſiti vel dati. Prima datis extremis quærit mediũ diviſione additorũ per ipſorũ numerũ: ut ſi duo ſint extrema per 2: ſi tria per 3: & ſic deinceps: ut modius tritici 16 ſolidorũ cum modio ſecalis 12 miſcẽdus ſit, addes 16 & 12, & totum 28 divides per 2, quotus 14 oſtendet pretium tertii miſti. Hic medium eſt Arithmeticũ quoties extrema duo ſunt. Si miſcendus ſit cum utroque modius hordei 10 ſolidorum tria pretia addita 38 dividantur per 3, quotus 12 $\frac{2}{3}$ oſtẽdit pretium quarti miſti.

Secũda alligatio eſt æquatio dati medii per inæqualiũ extremorũ alternas ab

eo differentias: æquatur autem medium datum nunc menſura, nunc pondere, nunc numero quæſitorum generum: ut ſic duobus vini generibus, quorum primi pinta valeat denarios 6, ſecundi 12, miſcendum ſit, cujus pinta valeat 10 : alternæ differentiæ extremorum 6 & 12 à medio 10, erunt 2 & 4, quæ ſignificabūt, ſi 2 pintæ ſumantur primi generis 4 aſſumendas ſecundi: itaque ſi pintæ 6 miſcendæ ſint, alligatio ſine ulla proportione perfecta erit, ut hîc vides:

	6	2
10		
	12	4

Alligationis hujus cauſa eſt è communibus regulis multiplicationis. Nam ſi multiplices 10 per 6, facies 60: item ſi multiplices 10 per 2 & 4 ſegmenta ſenarii multiplicantis, facies 20 & 40 æquales ipſi 60: quia idem eſt multiplicare per totum & per partes: cùm ſi per eadem ſegmenta 2 & 4 multiplices totum 10 alterno ſegmento, nunc imminutum, nunc auctum, id eſt per 6 & per 12 facies 12 & 48 eidem 60 æquales, ut hic vides:

10	10	10	6	12
6	2	4	2	4
60	20	40	12	48

At 2 pintæ primi vini per 6 pretium multiplicatæ faciunt denarios 12 : & 4 pintæ ſecundi vini per denarios 12 pretium multiplicatæ, faciunt 48. Tum 12 & 48 ſunt denarii 60: item 2 pintæ per 10, & 4 pintæ per 10 faciunt denarios 20, & 40, id eſt 60. Itaque quod pintæ ſimplices valebant, temperatæ pintæ valent idem. Ideoq; in hac temperatione differentiæ á medio alligantur extremis alternis: ſuis autem extremis alligatæ facerent plus vel minus, ut hic vides:

	10			10	
8		14	12		6
2		4	2		4
16		56	24		24
	72			84	

Quare per alternas extremorum differentias alligatio facienda eſt. Neque medius alligationis terminus eſt proportionis, ſicuti neque alligatio ipſa eſt ulla proportio, ſed medius quantitate inter inæquales extremos: eſtq; minor majore extremo, major minore. Nec alligatio ipſa (ut dixi) proportio eſt, cum ſine ea fiat, nec cùm proportione utitur, neceſſario proportionis additionem adhibet, qualis eſt in permiſcēdis metallis quotidiana ratio, ut ſi aurifex habeat 100 pondo argenti, quorum quodlibet valeat 17: item alteram habeat infinitã maſ-

ſam,

ſam,cujus pondo valeat 24:quantum argenti è ſecunda maſſa addet primæ,ut pondo valeat 22,& quantum omnino futurum eſt? Alligatio alternarum differentiarum ſic erit.

17 2
22
24 5

Vnde concludes,2 pondo primi argenti,5 pondo ſecundi requirũt:ergo 100 requirunt 250,quibus adde 100 è prima maſſa,habebis 350 pōdo miſti argenti. Sed alligationis quæſtio rara eſt,ſine proportionis additione, ut in exemplo primo. Si unus ſextarius temperandus eſſet è duobus illis generibus, tum alligatione facta,diceretur non peti 6,ſed 1. Itaque proportionis additio id explicaret hoc modo. 6 redeunt ad 1:ergo 2 redibunt ad $\frac{2}{6}$ id eſt $\frac{1}{3}$: 4 redibũt ad $\frac{4}{6}$, id eſt ad $\frac{2}{3}$,totaque quæſtio ſic erit.

6 2. 2 $\frac{1}{3}$
10 6 1
12 4. 4. $\frac{2}{3}$

Tale eſt Archimedeum problema illud apud Vitruvium lib.9.ca.3. de aurea regula Hieronis regis corona ad deprehendendum aurificis furtum. Sed in hoc exemplo Phyſica conſideratio fuit,non tantum ponderis, ſed denſitatis & raritatis,ut tanto plus minuſve loci occuparetur. Duas(inquit Vitruvius) maſſas ejuſdem ponderis cum regia corona Archimedes fecit,alteram auream, argenteam alteram,quibus viciſsim in vas aqua plenum demiſsis,è differentia effuſæ aquæ ad auream maſſam & argenteam,item ad regiam coronam, deprehendit argenti in aurea corona miſtionem. Eſto igitur inæqualis effuſio aquæ ex aurea maſſa 20,ex argentea 36,ex ipſa regis corona 24. Sumptis differentiis vides auri triplum,argenti ſubtripſum in corona permiſtum eſſe. Et ſi corona 16 pondo eſſet,eſſent libræ auri 12,argenti 4,& hæc alligatio eſt ſine proportione. At ſi alterius ponderis ea fuerit,ſimilem rationem proportionis additione concludes: ut ſi fuerit 100 pondo, quæſtionis explicatio tota ſic erit.

20 12. 12 75
24 16 10
36 4. 4 25

Alligationis cauſſa eadem fuerit,ubi termini non tantum tres, ſed quotlibet proponentur: Bini ſiquidem extremi ad unum medium perpetuo conferendi, & differentiæ ad unum extremum alligandæ & per additionem colligendæ. Alligatio autem complurium terminorum multis modis fieri poteſt, ſed primus & promptiſsimus modus binos terminos ſemel alligare,ſi multitudo ſit par mi

norum parte una & maiorum parte altera, ſecus alligandum erit idem pluribus: ut Monetarius habet genera quatuor argenti, primum eſt 3 denariorum, ſecundum 5, tertium 8, quartum 10, quærit quintum genus 6 denariorum. Exemplum totum ſic erit.

	3	4
	5	2
6.		
	8	1
	10	3

His ſi decem pondo miſti ac temperati è quatuor generibus argenti quærantur, ſumentur 4 primi: 2 ſecũdi: 1 tertii: 3 quarti: ſin plura, proportio explicabit. In hoc igitur exemplo par eſt utrinque multitudo differentiarum: in proximo ſecus eſt, unus enim & idem ter alligatur: ut vini genera quatuor ſunto, primiq; amphora valeat 7, ſecundi 9, tertii 10, quarti 12, & miſcendæ ſint amphoræ 300, quæ ſingulæ valent 11, diſpoſitis terminis, differẽtiiſq; alterne alligatis tota quæſtio ſic erit.

	7. 1			1	30
	9. 1				
	10. 1			1	30
11.		10	300	1	30
	12. 4. 2. 1.				
				7	210

In proximo exemplo quia numerus extremorum par eſt utrinque ſinguli ſemel alligabũtur, mercator emerit 400 pondo aromatũ ſextuplicis generis libellis 200, & quærat quot pondo ſingulorũ generum ſit accepturus. Hæc quæſtio diſsimilis eſt ſuperioris illius ad quintum caput de æquali numero ſingulorum generum. Hic enim quæritur quicunq; poſsit eſſe ſingulorum generum numerus, non quæritur æqualis: poſitis igitur ſingulorum generum pretiis, primi 6, ſecundi 7, tertii 9, quarti 11, quinti 12, ſexti 16, medium pro arbitrio ubi voles aſſumetur. Sumatur in medio & ſit 10. Alligatio hic erit alternis ſingulorum ſemel ſic.

	6	6		6	$141\frac{9}{17}$
	7	2		2	$47\frac{1}{17}$
	9	1		1	$23\frac{9}{17}$
10		17	400		
	11	1		1	$23\frac{9}{17}$
	12	3		3	$70\frac{10}{17}$
	16	4		4	$92\frac{2}{17}$

Atqui

Atqui in hoc quæſtionis genere ſi medius quātitatis terminus nullus ſit, non eſt explicabilis per alligationem, quæſtio hujuſcemodi.

CAP. II. DE COMPOSITA PROPORtione per multiplicationem ſolam.

COmpoſitio terminorum prima ejuſmodi fuit in additione, & contra deductio quædam in alligatione: ſecunda ſequitur quæ fit terminis multiplicatis, cùm pro binis ſimplicibus aſſumuntur duo ab ijs facti: ſed multiplicatio interdum ſola eſt, interdum etiam additio, multiplicationis ſolius exempla prima ſunto: ut aurei 3 menſibus 2 lucrantur aureos 6: aurei 4 menſibus 3 quot lucrabuntur? Termini ſic erunt.

3	6	4	
$\frac{2}{6}$,	6	$\frac{3}{12}$	12

Facti autem nomen accipient ab utrolibet factore, ut hic dies vel aurei 6, lucrātur aureos 6, vel menſes 6, lucrantur aureos 6. verum ubi accidet terminum antecedentis æqualē eſſe termino conſequentis, iis ſublatis, tres reliqui proportionem eandem concludent, quia facti per eundē ſunt, ut hic rejectis 3 & 3, concludes nihilominus 2.6.4.12. Item modius tritici 15 ſolidorum dat panem 8 unciarum, 2 denariis. Ergo modius 20 ſolidorum dat panem 15 unciarum 5 denariis. Exemplum ſic eſt.

15	2.	20
$\frac{8}{120}$.	2	$\frac{15}{100}$

Vel ſic ſublatis terminis æqualibus 8. 2. 20. 5. Sed pluribus exemplis res illuſtretur, Pondo 100, milliaria 20 vehuntur 36 libellis, ergo pondo 50 millia 12 vehentur l. 10 $\frac{4}{5}$. ulnæ panni lati $\frac{3}{4}$, væneunt 6 libellis, ergo 40 ulnæ lati ulnam 1 $\frac{2}{5}$ væneunt l. 35 $\frac{9}{9}$.

Aulæum longum ulnas 2 & $\frac{1}{2}$, latum 2 emitur 50 libellis, ergo tapetum ejuſdem generis alterum longum ulnam 1, latum $\frac{5}{6}$ emetur l. 8. ſ. 6. d. 8. Boves 10 arāt diebus 7 jugera 35. ergo boves 20 arabunt diebus 24 jugera 240. Huius generis cōpoſitione ſæpe quæſtio primæ alligationis explicatur: Sunto 10 modii tritici aſsium ſedenorum, ſecalis 18 duodenorum, facti à 10 & 16, item ab 18 & 12 ſunt 160, 216, & ex iis additis totus erit 376, numeri rerum 10 & 18 ſunt 28, tum deniq; proportio concludet. 28 dant 376 ergo 1 dabit 13 $\frac{3}{7}$. Exemplum ſic erit.

	10		18
	$\frac{16}{160}$		$\frac{12}{216}$
28.	376.	1	13 $\frac{3}{7}$

Sunto.

Sunto eadem genera frumenti modii 54, tritici pretij 16, ſecalis 30, pretii 12, hordei 23, pretii 10, procedes ut antea. Exemplum ſic erit.

	54	16	864
	30	12	360
	23	10	230
107.	1454.	1.	$13 \frac{63}{107}$

Si partes generum miſcendæ ſint, erit eadem ratio, niſi quod pro iis ſumitur ab iis minimus dividuus & partes datis cognomines.

Eſto pondo caryophili 36 aſsium, cinnami 15, piperis 13, & velis miſcere primi generis $\frac{1}{2}$, ſecūdi $\frac{1}{3}$, tertii $\frac{1}{4}$, Minimus dividuus ab iis partibus eſt 12, & partes cognomines ſunt 6.4.3 totumque exemplum ſic erit.

	6	36	216
	4	15	60
	3	13	39
13	315	1	$24 \frac{3}{13}$

Proportio hæc interdū invertitur multiplicatis inter ſe primo & quinto, item ſecundo & quarto ad factionem primi & tertii: ut 2 meſſores demetunt 6 jugera 4 diebus: 8 meſſores 12 jugera quot diebus demetēt? reperies 2, exemplū ſic erit.

2	4	8
6		12
24		48
4		2

Sic reciprocatio manifeſta eſt ut primus: vel inverſio ſic.

2 24 4 48.

CAP. XII. DE PROPORTIONE COMpoſita per multiplicationem & additionem.

Compoſitio multiplicationis ſimul & additionis, eſt quæ oblatos terminos primo multiplicat, tum ab illis factos addit, ut, Trium mercatorum primus contulit aureos 44 per 8. menſes, ſecundus 32 per 6 menſes, tertius 24 per 4 menſes, unde lucrati ſunt aureos 80, quantum ſingulis ex hoc lucro cedet? Multiplica ſortem quamque cum ſuo tempore, primi compoſitus erit 352, ſecundi 192, tertii 96, & ſingulis jam additis dicito.

640 dant

	352	44
640 dant 80.ergo	192	24
	96	12

Legio habet pedites 6100,equites 726,& peditis ſtipēdium eſt 4 aurei, equitis 9,præda aureorum 200 his dividenda,quantum ſingulis dabitur: multiplica numeros perſonarum & ſtipendiorum,primus factus erit 24400, ſecundus 6534,tum facti addantur,erunt 30934,& dic:

30934 dant 2000:ergo	24400	$1577\,\frac{17082}{30934}$ vel $\frac{8541}{15467}$
	6534	$422\,\frac{13852}{30934}$ vel $\frac{6926}{15467}$

Canonici 12 & ſacellani 20 partiuntur quotannis aureos 3000, ſed ea lege ut canonicus 5 capiat, quoties ſacellanus 4, quantum igitur eorum ſtipendium eſt annuum: multiplica numeros perſonarum & ſtipēdiorum, primus erit 60, ſecundus 80,qui additi ſunt 140:dic igitur.

	60	$1285\,\frac{5}{7}$
140 dant 3000:ergo		
	80	$1714\,\frac{2}{7}$

Interdum faciendi complures è variis generibus ſortium & temporum, in unum tandem omnes addendi, ut Quatuor mercatorum biennii ſocietate inita,primus 30 aureos contulit,ſed octavo poſt menſe 10 ſubduxit,iterumque viceſimo menſe ineunte 12 contulit: ſecundus initio 24 contulit,ac ſexto poſt exacto menſe ſubduxit 8,denuoque ſextidecimi menſis initio 14 retulit: tertius initio contulit 20, & ſeptimo poſt exacto menſe 8 omnes ſubduxit, ſed decimo ſeptimo poſt exacto menſe 16 retulit. Quartus ſeptimo menſe ineunte 18 aureos contulit,ſed quarto poſt exacto menſe 9 ſubduxit, iterumque decimo ſeptimo menſe incipiēte 15 addit:lucrum ex omnibus his ſummis factum eſt 100 aureorum. Quæritur lucrum ſingulorū. Hic quæſtio laboris multo plus habet,quàm quæſtionis explicatio: itaq; totam & quæſtionem,& quæſtionis explicationem ſubtiliter adſcripſi,ut hic vides.

30	8	240		
20	11	220		620
32	5	160		
24	6	144		
16	9	144		558
30	9	270		
20	7	140		
0	10		252	
16	7	112		
0	6	0		

18	4	72	318
9	6	54	
24	8	192	

Hic ſortes & tempora in ſuum compoſitum habes reducta. Nam primi 30 aurei & 8 menſes faciunt 240: Deinde reliqui 20 aurei & 11 menſes faciunt 220. Poſtea 20 aurei & 12, id eſt 32 & menſes 5 faciunt 160. Deniq; facti tres additi ſunt 620. Secundi mercatoris 24 aurei & 6 menſes faciunt 144. Deinde reliqui 6 & 9 menſes faciunt 144, tum aurei 14 & 15 id eſt 30, cum 9 menſibus faciũt 270. Hi tres facti additi ſunt 558. Tertii 20 aurei & 7 menſes faciunt 140: Deinde 15 aurei & menſes 7 faciunt 112, hic factus additus priori, conſtituit 252. Quarti 18 aurei & 4 menſes faciunt 72, tum 9 aurei & menſes 6 faciunt 54. Denique 9 & 15, id eſt 24 aurei & 8 menſes faciunt 192, quatuor facti additi ſunt 318. Colligamus tãdem hos quatuor compoſitos, & cõcludamus principem proportionẽ.

	620	$35\frac{205}{437}$
1748 dant 100. ergo	558	$31\frac{405}{437}$
	252	$14\frac{182}{437}$
	318	$18\frac{84}{437}$

In hanc etiam ſpeciem incident alligationes ignoti medii, quoties major expetetur numerus, ut in illo frumentorum exemplo ſi pro 13 expeterentur 100. exemplum ſic eſſet.

		6	$46\frac{2}{13}$
13.	100		
		4	$30\frac{10}{13}$
		3	$23\frac{1}{13}$

CAP. XIII. DE PROPORTIONE TERMINIS CONtinuata ad inveniendum minimos terminos in datis rationibus.

Proportio multiplex terminis compoſita adhuc fuit, ſupereſt terminis continuata. Proportio terminis cõtinuata eſt quãdo antecedẽtis rationis aliquis terminus continuatur in conſequente: ut inventio minimorum numerorum in datis rationibus & æquatio. Si datis rationibus quotlibet in minimis terminis proportionales ad ſecũdum & tertium minimi multiplicent obliquè terminos duarum primarum rationum, facti erunt continuè minimi in datis rationibus: Deinde ſi proportionales ad poſtremo inventum & antecedentem conſequentis rationis minimi multiplicent obliquè, alter inventos, alter ſequẽtes omnes, facti erunt continuè minimi in datis rationibus, ut hic vides.

5	6	4	3
10	12	9	

Nam ſi ſumas minimos ad 6 & 4, habebis 3 & 2, tum ſi multiplices obliquè 6 & 5 per 2, facies 12 & 10. Item ſi per 3 multiplices obliquè 4 & 3 facies 12 & 9

continuè

continuè minimos in datis rationibus: ut enim 5 ad 6, ita 10 ad 12, & ut 4 ad 3 ſic 12 ad 9. Hic aũt continuatio terminorũ eſt in datis rationibus, ut regula præcipit: non aũt continuatio rationum, & hæc proportio diſjuncta eſt rationibus continua tantum terminis minimis in datis rationibus. Eſto & aliud exemplũ.

2	3 |	4	5 |	6	7
8	12		15		
16	24		30		35

In hoc exemplo proportionales ad 15 poſtremo inventum, & 6 antecedentem ſequẽtis rationis minimi ſunt 5 & 2, qui multiplicatione obliqua fecerunt 16.24.30.35. Denique hac regula continuabis quotlibet minimos in datis rationibus minimorum numerorum: habet verò & hæc continuatio uſum valde ſingularem ad illam politicam juſtitiæ ideam, de qua in additionis compoſitione diximus: Atque ut res ipſa clarior fiat & illuſtrior, audiatur juſtitiæ conſultus & magiſter ille de liberis & poſthumis hæredibus inſtituendis. Julianus enim generis hujus quæſtionem proponit Digeſt. lib. 28. Si ita ſcriptum ſit (ait) ſi mihi filius natus fuerit, ex beſſe hæres eſto, ex reliqua parte uxor mea hæres eſto. Si verò filia mihi nata fuerit, ex triente hæres eſto, ex reliqua parte uxor mea hæres eſto: & ſi filius & filia nati eſſent, dicendum eſt aſſem diſtribuendũ eſſe in 7 partes, ut ex his filius 4, uxor 2, filia 1 partem habeat. Ita enim ſecundum voluntatem teſtantis filius altero tanto amplius habebit quàm filia. Licet enim ſubtili juris regulę conveniat ruptum fieri teſtamentum: attamen cùm & utroque nato teſtator voluerit uxorem aliquid habere, ideo ad ejuſmodi ſententiam humanitate ſuggerente decurſum eſt, quod etiam Iuventio Celſo apertiſsime placuit. Hæc jureconſultus de uno & ſingulari theorematis hujus exemplo. at præſtat theorema ipſum ut generale eſt, ita generaliter inſtitui. Hic igitur intelligimus ex volũtate teſtatoris tres numeros inveniẽdos eſſe continuè minimos in datis rationibus $\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}$ id eſt in rationibus 2.1|2.1. qui erunt 4.2.1. Ac ſi hæreditas fuerit 70 coronatorũ ex additis illis terminis quæſtio herciſcũdæ familiæ ita ſolvetur.

	4	40
7 dant 70: ergo	2	20
	1	10

In hoc exemplo accidit rationes continuari: at ſi uxor duos filios & totidem filias pepererit neque ſeptenarius Iuliani ſufficeret neque rationes continuabũtur, ſed tres quaternarii pro tribus filiis, binarius unus pro matre, duæ unitates pro duabus filiabus aſſumendæ: adde igitur omnes & conclude.

	4	$17\frac{1}{2}$
	4	$17\frac{1}{2}$
16 dant 70: Ergo	4	$17\frac{1}{2}$
	2	$8\frac{3}{4}$
	1	$4\frac{3}{8}$
	1	$4\frac{3}{8}$

Similia ſunt illa. Partiatur pater tribus filiјs 100 aureos ea conditione, ut quoties primus 5 capit, toties ſecundus 6 capiat, & quoties ſecundus capit 7, toties tertius capiat 9: quot aureos ſinguli capient? Hic duæ ſunt rationes in minimis terminis 5 ad 6, 7 ad 9, in quibus rationibus proportionales minimi continui ſunt 35.42.54. hoc modo.

5	6 | 7	9 |
35	42	54

Adde igitur tres continuos repertos, totus erit 131. & jam dicito,

	35	62 $\frac{94}{131}$
131 dant 100: ergo	42	32 $\frac{8}{131}$
	54	41 $\frac{29}{131}$

Augeatur verò numerus hæredum, & quatuor hæredibus 100 ita dividãtur, ut quoties primus capit 3, ſecundus capiat 4, & quoties ſecundus capit 5, toties tertius capiat 6. Denique quoties tertius capit 7, toties quartus capiat 8: quot aurei ſingulis cedent? hic ſunt tres rationes in minimis terminis diſsimiles: 3 ad 4, 5 ad 6, 7 ad 8, in quibus continui termini ſunt 105.140.158.192. adde continuos, totus erit 605: & dicito

	105	17 $\frac{43}{121}$
505 dant 100: ergò	140	23 $\frac{17}{121}$
	168	27 $\frac{93}{121}$
	192	31 $\frac{89}{121}$

CAP. 14. DE AEQVATIONE.

Eiuſmodi igitur eſt inventio minimorum in datis rationibus: ſupereſt æquatio, id eſt continuatio duorum ordinũ binis numeris proportionalium: Itaque extremi remotis mediis ſunt proportionales, neque continuatio rationum hic expetitur, ſed terminorum tantummodo: æquatio eſt ordinata vel perturbata: æquatio ordinata eſt æquatio ſecundum eundem ordinem numerorum. Itaque primi ſecundis, ſecundi tertiis ſunt proportionales: ut hic vides in tribus exemplis, quæ continuari in unum poſſunt.

9.	6.	3.	9.	6.	9.	3.	6.	9.
12.	8.	4.	12.	8.	12	4.	8.	12.

Hoc genere proportionis plurimæ in elementis demonſtrationes à Theone concluſæ ſunt: potes autẽ in exemplo continuare æquationem proportionibus octo: dicique ſeptem intermiſsis proportionibus, ut 9 ad 9, ſic 12 ad 12. æquatio turbata eſt quando fuerit ut primi ordinis primus ad ſecundum, ſic ſecundi ſecundus ad tertium: utque primi ſecundus ad tertium, ſic ſecundi primus ad ſecundum: ut vides in tribus exemplis ſeparatis non continuis.

9.	8.	6.	9.	8.	9.	32.	16.	8
24.	18.	16.	16.	18.	16	8.	4.	2

Hic enim

Hic enim ut 9 ad 8, ſic 18 ad 16: item ut 8 ad 6, ſic 24 ad 18, & ſimiliter inverſo ordine in reliquis exemplis. Difficile autem ſit in numeris integris terminos proportionis inverſe æquatos continuare: continuari tamen poſſunt ordine non ſolum inverſo, ſed in contrarias partes tendente: ut hic vides

6. 3. 2. 1. 3. 4. 3. 1. 2.

12. 24. 8. 6. 8. 24. 12. 8. 4.

Hoc proportionis genus minus uſitatum eſt, ea tamen Archimedes utitur 4 theoremate 2. de Sphæra, & 9. Theor. 2. Iſorro.

CAP. XV. DE CONTINUAE *proportionis proprietate.*

PRoportio diſjuncta generatim deſcripta eſt, jam tēpus eſt de continua dicendi, quando quæ ratio eſt primi termini ad ſecundum, eadem eſt ſecundi ad tertium: ut in 2. 4. 8. De proportione continua & ſimplici in tribus terminis vel multiplici, in longius continuis ſimilia ferê præcipiuntur ijs quæ præcepta ſunt in proportiōne diſjuncta. Proprietas primó duplex deducitur é duplici proprietate diſjunctæ proportionis. Si tres numeri ſunt cōtinuê proportionales, maximus & minimus majores ſunt medio: ut in 2. 4. 8. 10 ſuperant 4: neque tamē cōvertitur magis quám antea. Secunda autem proprietas eſt reciproca. Nam 16 factus à 4 medio eſt æqualis ipſi 16 facto à 2 & 8 extremis, & viciſsim, cum ęqualitas iſta ſit, tres numeri ſunt proportionales. Hic enim medius eſt pro duobus. Itaque quod aurea regula docuit de quatuor diſjunctis, id nunc continua proportio aſſumit in tribus cōtinuis. Hinc etiam patet inventio proportionalis ſive medij ſive extremi. Nã ſi factum à duobus tertius per ſe diviſerit, erit medius proportionalis, ut 4 per 4 dividit 16 factum à 2 & 8, & medius eſt proportionalis inter 2 & 8. Item, Si primus diviſerit factum à ſecundo, quotus erit illis tertius proportionalis, ut in eodem exemplo datis 2 & 4, primus 2 dividat 16 factum à 4 ſecundo, quotus 8 erit tertius illis continuè proportionalis. Itaq; regula hic aurea etiam eſt, ſed in tribus numeris, quæ ante fuerat in quatuor, hinc varia ſequuntur: primó. Si duo numeri habeant tertium proportionalem, erunt compoſiti inter ſe, ut in eodem exemplo 2 & 4. Ideoq; ſi primi ſint inter ſe, nō habebūt proportionalem tertium: ut in 2. 3. Nam ſi 9 factum á 3 dividas per 2, quotus erit 4 $\frac{1}{2}$, qui numerus non eſt integer.

CAP. XVI. DE INVENTIONE *continuè proportionalium.*

HAEc proprietas eſt proportionis continuæ & ſimplicis ad inventionem tertij proportionalis. Sed proportio continua quotlibet terminis continuari

poteſt,tumque ratio primi ad ſecũdum duplicatur in tertio, triplicatur in quarto, & ſic deinceps uno minus: ut in 1. 2. 4 ratio 1 ad 4 eſt ratio 1 ad 2 duplicata in 1. 2. 4. 8. ratio 1 ad 8 eſt ratio 1 ad 2 triplicata, ratio nempe extremorum colligitur ex omnibus intermediis,ut antea patuit. In hac progreſsione plurima ſpectari po. Tunc ut ſi primus dividat ſecundum dividet conſequentes omnes,ſi dividat ultimum dividet ſecundum,ſed præcipué ſpectatur inventio terminorum vel ſumma Invẽtio terminorum multiplorũ facilis eſt multiplicando ultimum per nomen rationis, non item in reliquis generibus: theorema tamen inventionis hujus commune eſt, é datis duobus cujuſcunque rationis ſic eſt. Si duo datæ rationis numeri multiplicentur uterque per utrumque,fient tres continué proportionales datis: tum ſi facti multiplicentur per datum antecedentem, denuoque ultimus per datum conſequentem, quatuor fient continué proportionales datis,& ſic deinceps inveniẽtur quotlibet in data ratione,ut hic vides.

2 3
4 6 9
8 12 18 27
16 24 36 54 81

Hoc exemplum fuit rationis ſuperparticularis, via eadem erit in reliquis generibus. Hinc etiam ſequitur inventio minimorum, ſi nempe dati ſint minimi. Extremi enim erunt primi,quia facti à primis inter ſe,vel à primis per primos. at ſi continué proportionales ſint, extremorum inter ſe primorum erunt minimi, & contrá,ut in eodem exemplo patet. Itaque ſi continuatio ſit extremorum inter ſe,primorum erit maxima. Ex hac inventione duplex inventio alia ſequitur,prima. Si duo numeri habuerint continué medios.proportionales datis habebũt: medios totidem,ut in eodem exemplo. Secunda. Quot continué medios habẽt primi inter ſe,totidem habeant ad unitatem. Et quot medios habent duo numeri, & unitas, dati totidem habent: ut in eodem exemplo ſi proponatur unitas,ut hic vidés.

1
2 3
4 6 9
8 12 18 27
16 24 36 54 81.

Ex hoc autem conſectario ſecundò ſequitur inventio cujuſcunque optati termini é multiplicibus. Si termini progreſsionis arithmeticæ ab unitate, terminis geometricæ progreſsionis à datæ rationis primó multitudinis numero reſpondeant,factus á duobus geometricis,erit progreſsionis ſuæ terminus uno major quám eſt ſimul uterque arithmeticorum multiplicatis reſpondentium,ut in hac progreſsione dupla.

1. 2. 3. 4. 5. 6.
1 2 4 8 16 32 64

Itaque

348

Itaq; ſi quæras terminum progreſsionis octavum, adde arithmeticos terminos conſtituentes ſeptimum, ut 3 & 4, & multiplica geometricos ijs reſpondentes 8 & 16. facies 128 octavum terminum progreſsionis. Sic erit in hac progreſſione tripla.

	1	2	3	4	5
1	3	9	27	81	243

Si quæras decimum, multiplica 243 per 81 reſpondentes arithmeticis 4 & 5, conſtituentibus nonum, facies 19683 decimum terminum. Hęc termini optati eſt inventio. Obſervata verò eſt hæc inventio in hac multiplici continuatione ex arithmetica locorum progreſsione, ut regula inſtituit, quia primus multitudinis numerus multiplicans ſecundum facit tertium, hoc in primo loco ſingulare jus eſt, ſecundus multiplicans tertium facit non jam quartum, ſed uno plus id eſt quintum, tertius multiplicans quartum facit, non quintum, ſed plus duo bus, id eſt ſeptimum, & ſic deinceps. Cauſſa verò eſt tam diſparis accretionis pro portionalium proprietas, quia quot inter unitatem & ſecundum è duobus multiplicatis, intercedunt continuè medii, tot inter ſecundum è multiplicatis & optatum intercedunt. Omnis enim progreſsio multiplicium eſt ab unitate, quia numerus multitudinis quilibet eſt multiplex ad unitatem. Ideoque inventio optati eſt in ſolis multiplicibus, quorum nempe primus terminus poſsit eſſe unitas: in reliquis rationum generibus non eſt, in quibus neque unitas poteſt eſſe primus terminus, neque ideo progreſsio poteſt infinitè ab unitate perpetuari.

CAP. XVII. DE INVENIENDA *ſumma progreßionis geometricæ.*

ATque hæc de inventione continuorum, ſumma ſequitur: Si tollatur primus à ſecundo & ultimo, erit ut reliquus ſecundi ad primum, ſic reliquus ultimi ad ultimum precedentes omnes. Ideoque, ſi quartus (qui ſic erit ad reliquum ultimi, ut reliquus ſecundi ad primum) addatur ultimo totus, erit ſumma, ut hic vides.

2	4	8
	2	6

Tollatur 2 à 4 & ab 8. ut 2 reliquus ſecundi eſt ad primum 2, ſic 6 reliquus ultimi eſt ad 4 & 2 præcedentes: utrobique enim eſt æqualitas. Proportionales ſunt igitur 2.2.6.6. jam 6 addatur 8 ultimo, ſumma progreſsionis erit 14. Sic in

2	8	32
	6	30

Tollatur

Tollatur 2 ab 8 & 32, manent 6 & 30, utcꝫ 6 eſt ad 2, ſic 30 eſt ad præcedentes, ideocꝫ triplus: proportionales igitur erunt 6. 2. 30. 10. Iam denique 10 addatur 32, totus 42 erit ſumma progreſsionis. Fac periculum in majore progreſsione, ut hic uides.

2 4 8 16 32 64
2 62

Tollatur 2 à 4 & 64. manent 2 & 62: utcꝫ 2 eſt ad 2, ſic 62 ad præcedentes, ideocꝫ æqualis eſt illis, proportionalesꝙ ita ſunt 2. 2. 62. 62. Quapropter 62 ad dantur 64, totus 126 erit progreſsionis ſumma.

Agricola promiſit filio ſuo pro xenijs primo anni die in triginta continuos dies modios tritici primo 1, ſecundo 2, tertio 4, & ſic deinceps duplicando: quæritur triceſimo die quot modii futuri ſint. Quæratur triceſimus terminus, id eſt ultimus progreſsionis hujus, ut antea demonſtratum eſt: primo ſextus 64 per ſeſe faciet 4096 pro duodecimo termino: ut hic turſus ex ſeſe faciet 16777216 pro viceſimo quarto termino, quem multiplica per 32 quintum terminum, facies pro viceſimo nono termino 536870912, qui triceſimus erit, ſi unitas pro primo numeretur. Tollatur igitur unitas à ſecundo & ultimo, exuperantia ſecundi erit æqualis primo. Itacꝫ inventus ultimus uno dempto erit æqualis omnib. antecedentibus. Addatur utercꝫ, ſumma tota erit 1073741823. Regula plura pōderandi paucis ponderibus deducitur è geometrica progreſsione, quæ libripēdi ſingularem commoditatem ſuppeditat: ideocꝫ ad extremum addenda viſa eſt, ut in proximo exemplo.

Libræ terminis duplæ & triplæ continuationis comprehenſę, totidem cognominibus ponderibus appenduntur. Id verò fit nunc additione ponderis ad pōdus, nunc ſubductione & ad oppoſitam lancem additione. Sic libræ uſque ad 7 appenduntur tribus ponderibus, quorum primum unius libræ, ſecundum binarium, id eſt duarum librarum, tertium quaternarium, quia progreſsionis 1. 2. 4. termini tantum comprehendunt: ſic libræ uſque ad 15 appenduntur 4 ponderibus hac progreſsione ſignificatis 1. 2. 4. 8. Sic libræ 31 ponderibus hujus cōtinuationis 1. 2. 4. 8. 16. Sic in tripla ratione, libræ uſcꝫ ad 40, appenduntur ponderibus hac progreſsione ſignificatis 1. 3. 9. 27. Sic libræ uſcꝫ ad 121 appenduntur his ponderibus 1. 3. 9. 27. 81. & ſic deinceps libræ terminis triplæ progreſsionis comprehenſæ, totidem cognominibus ponderibus appendentur.

FINIS.

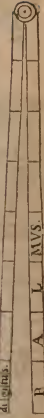
I

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. I. DE MAGNITVDINE.

Geometria eſt ars bene metiendi.

Finis geometriæ eſt bene metiri, ideoque ſuo fine definitur: Bene metiri igitur eſt cuiuſque rei menſurabilis naturam atque affectionem conſiderare, resq́ menſurabiles comparare inter ſe, rationemq́ & proportionē atque ſimilitudinem perſpicere: id enim totum eſt bene metiri, ſive cōgruentia & applicatione datæ menſuræ, ſive multiplicatione terminorum, ſive facti per multiplicationem partitione, ſive quacunq; alia ratione rei mēſurabilis affectio conſideretur. Atque hic finis geometriæ uſu atque opere geometrico multò ſplendidior apparebit, quàm præceptis, cum animadvertes aſtronomos, geographos, geodetas, nautas, mechanicos, architectos, pictores, ſtatuarios in deſcriptione & dimenſione aſtrorum, regionum, fundorum, machinarum, æquorum, ædificiorum, tabularum, ſignorum nihil aliud quàm geometria uti: ſicuti grammatica, rhetorica, logica plenius & abundantius percipiuntur ex uſu poetarum, oratorum, philoſophorum, quam è dictatis grammaticorum, rhetorum, logicorum: denique ut in grammaticis rebus bene loqui, in rhetoricis bene dicere, in logicis bene ratiocinari, in arithmeticis bene numerare, ſic in geometricis bene metiri ſit finis ſummus atque ultimus: quo referantur & pertineant omnia, quæ totis geometricis elementis inſtituantur. Menſura verò in quolibet menſurabili genere eſt quippiam minimum, ut Ariſtoteles annuit 4 cap. 2 de cælo, & Proclus in Timæum repetit, & vulgo à geometris famoſa menſura dicitur, ut in metiendis palmis, pedibus, paſsibus, unus palmus, unus pes, unus paſſus. Sed enim Protagoræ antiquū dictū eſt, in Ariſtotelis philoſophia hominē eſſe τὸ τῶν ἁπάντων χρημάτων μέτρον omnium rerum menſuram, quod etſi alio quodam ſenſu uſurpatur à Protagora, attamen libenter audio hominē natura geometricum eſſe: & Vitruvius Heroque mechanicus docent menſuras rerum ex humanis membris acceptas eſſe, digito, palmo, pede, cubito. Digitus eſt 4 granorum hordeaceorum, ut granum hordei minima menſura ſit, palmus 4 digitorum, pes quatuor palmorum. ut ſequitur.

Cubitus à radice ad extremum longiſsimum digitum eſt ſeſquipes. Ex iis menſuris oritur itineris menſura paſſus, ſtadium millia riũ. Paſſus geometricus eſt 5 pedum, ſtadium 125 paſſuum: & Græcorum eſt: milliarium mille paſſuum, & eſt Latinorum: ideoq; mille & millia pro milliario & milliariis ſumuntur.. Franci & Hiſpani Leucam 2000 paſſuum nominant. de cæteris generibus menſuræ plura in ſcholis. Quare geometria hunc in modum definita ſit ars bene metiendi. Nomen autem re nominata levius eſt. Geometria enim dicitur tanquam terræ tantum dimetiendæ ars quædam ſit, quod nomẽ videtur in Aegypto primum factum eſſe: ubi ad terminos agrorum Nili inundationibus obrutos reſtituẽdum primum geometria adhibita ſit. Itaque authori Epinomidis geometriæ ὄνομα γελοῖον nomen ridiculũ dicitur, quod nempe à terra mundani globi centro factũ ſit, cum geometria ſit ars metiendi non ſolum terram, ſed aquam, ſed aerem, totumque mundum, in eoque corpora, ſuperficies, lineas, omniaque omnino menſurabilia: Neque vero Plato cum dixit τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν, deum ſemper tanquam diceres, terrimetiri, intellexit terras tantum metientem deum, ſed ratione, proportione, ſimilitudine omnes mundi partes exornãtem & dimetientem: ut Plutarchus octavo Sympoſiacon ſecundo problemate interpretatur. Quare geometriæ nomen origine nimis anguſtum eſt: uſu tamen tandem eſt ampliatum latius, adeo ut cõfuſe & arithmeticam de numero, & metricam ipſam de magnitudine vulgo complectatur: & ſic Quintilianus ait lib.1. cap.10. geometriam dividi in numeros atque formas, & Euclides, quamvis in totis elementis verbum ipſum (geometria) nuſquam legatur, attamẽ re ipſa ſi elementa hoc nomine complecti voluit, & ſi titulus elemẽtorũ nominis hujus fuit, arithmeticam etiam & metricam geometriæ nomine cõplexus eſt. Et academiæ epigramma, μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω, non ſolum geometriæ, ſed totam mathematũ ignorantiam averſabatur. Itaque geometriæ nomen tandem latius amplificatum eſt. Platoni in Philebo & politico, & 7. de repub. μετρικὴ ſignificantiore verbo & magis proprio dicitur hæc ipſa ars: ſed quoniã nominum magiſter eſt uſus, geometriæ nomẽ teneatur modo ſua vi & facultate propria definitum. Singula autem elemẽta deinceps numero diſtinguentur, & poſtea per e literam elementum ſignificabitur.



2. *Res ad bene metiendum propoſita eſt magnitudo.*

Subjectũ geometriæ eſt magnitudo. Eſt enim ſingulis artibus certũ & propriũ quoddã propoſitũ genus ad interpretãdũ & ſuis præceptis informãdũ, eoque præcipue inter ſe differunt, præcipueque ſunt cõtinendæ. Idenim logica lex καθ' αὑτὸ imprimis præſcribit. Sic grammaticæ ſermo, rhetoricæ oratio, logicæ ratio, arithmeticæ numerus, ita nunc geometriæ magnitudo declaranda, & omnibus

mnibus generibus, differentiis, affectionibus explicanda proponitur.

3. *Magnitudo eſt quantitas continua.*

Hæc definitio eſt ex Ariſtotelis categoriis: numerus eſt quantitas diſcreta, ut binarius, ternarius, quaternarius, conſtans ex unitatibus, duabus, tribus, quatuor: hæ partes ſunt diſcretæ & ſeparatæ: at lineæ, ſuperficiei, corporis partes abſque ulla ſecretione continentur, ut mox plenius intelligetur. Itaque magnitudo eſt, qua menſurabile quodlibet magnum dicitur: ut linea longum, ſuperficie latum, corpore ſolidum.

4. *Continuum eſt, cujus partes communi termino continentur.*

Hæc item è categoriis Ariſtotelis definitio eſt, ſenſus reconditioris planeque geometrici: & præcipue dependet è communi termino: partes vero (quæ dicũtur) hic nihil in toto ſunt, niſi potentia: ut vere Ariſtoteles admonet 1. cap. 6. Phyſ. Neque tota magnitudo cogitari poſſet, niſi partibus ſuis compacta, quas tamen licet omnibus locis aſſumere contentas communi termino, qui Ariſtoteli eſt κοινὸς ὅρος, Euclidi κοινὴ τομὴ communis ſectio, ut in linea punctum, in ſuperficie linea, in corpore ſuperficies.

5. *Terminus eſt magnitudinis extremum.*

Terminus hic appellatur ſive actu terminet, ut in magnitudinis principio & fine, ſive potentia, ut cum eſt communis terminus continui, neque terminus eſt pars terminatæ magnitudinis: aliud enim eſt terminans, aliud terminatum. Terminus enim uno intervallo inferior eſt terminato: punctum lineę terminus eſt, & minor eſt uno intervallo, quia eſt individuum: linea eſt terminus ſuperficiei, & minor item intervallo, quia ſola eſt longitudo: ſuperficies eſt terminus corporis, & minor item intervallo, quia eſt longitudo tantum & latitudo. Et ſic Ariſtoteli in categoriis terminus lineæ, ſuperficiei, corporis accipitur punctum, linea, ſuperficies. Terminata verò & finita omnis magnitudo eſt actu, geometra que (ait Ariſtoteles 6. cap. 3. Phyſ.) infinitã lineam non aliter poſtulat, quam quanta ſatis ſit, & ſic ait idem 10. cap. 1. de cælo, διαγράμματα poſtulantur diſciplinæ cauſſa. Itaque

Magnitudo infinite & creatur, & continetur, & ſecatur iiſdem quibus terminatur.

Linea, ſuperficies, corpus creantur motu puncti, lineæ, ſuperficiei: item continentur & ſecantur puncto, linea, ſuperficie: at linea puncto, ſuperficies linea, corpus ſuperficie terminatur: ut per ſingula genera percipietur. De ſectiõe Proclus generatim etiam monuit antè 1 p. 1. Quod omnia dividuntur iiſdem, quib. terminantur: quod & continui definitione intelligitur. Nam ſi commune vinculum ad continendum & copulandum partes lineæ, ſuperficiei, corporis eſt punctum, linea, ſuperficies, neceſſe eſt ſectionem cõmunibus illis vinculis fieri, & diſſolvi, quod cõtinebat & copulabat. Infinita vero magnitudinis ſectio plurimis in Euclide locis de quibus in ſcholis poſtulatur: unde & geometrica ἀφαί

ρεσις & abſtractio perſpicue agnoſcitur. Magnitudo enim in geometricis rebus, non phyſica, ſed abſtracta à phyſico corpore animo concipitur. ἀφαίρεσις tamẽ communis omnium artium non geometriæ propria eſt: abſtractiva enim perinde eſt (ut Ariſtoteles author eſt 3 cap. 13 lib. philoſophiæ) aſtrologia, harmonica, Optica, Phyſica, Medicina, & omnino quælibet diſciplina: quæ generalia tantum documenta interpretatur, é logica nempe lege κατὰ παντός. Et quidẽ calor & rubor, qui maximé ſentiuntur, ſi propria doctrina doceantur, ſeparati à cæteris qualitatibus & abſtracti, imó á cæteris heterogeneis rebus cogitentur neceſſe eſt, ſolaque mente percipiantur, nec tamen talis in rerum natura calor, neque talis color ſeparatus & abſtractus ullus eſt. Attamen quamvis magnitudines, corpora, ſuperficies, lineæ, puncta mente ſic abſtrahantur á qualitatibus phyſicis & ſenſilibus â lucido, umbroſo, raro, denſo, levi, graui, calido, frigido, humido, ſicco, revera tamen eſſe in iis ipſis phyſicis corporibus Ariſtoteles ſæpé & ſolicite confirmat, ut in phyſicis 1. cap. lib. 2:5 & 8 cap 3. lib. de cælo: in methephyſicis præcipué 3 cap. 13 lib. ubi nominatim ait rationes & demonſtrationes eſſe de magnitudinibus ſenſilibus: non tamen quatenus ſunt ſenſiles, ſed prout tales ſunt. Et ſicut Vitellio ad 3 p 2. veriſsime ait. Omnis linea, qua pervenit lux à corpore luminoſo ad corpus oppoſitum, eſt linea naturalis ſenſilis, latitudinem quandam habens, in qua eſt linea mathematica per ſpeciem imaginationis aſſumẽda. Denique magnitudinis geometricæ intelligencia eſt mentis, magnitudo tamen ipſa, linea, ſuperficies, corpus eſt revera in ſenſili & phyſico corpore. Hæc logica de mathematis Ariſtotelea eſt. Quare magnitudines licet mẽte ſeparẽt, revera tamẽ ſunt illę ipſę magnitudines, quib. corpora phyſica corpora ſunt, id eſt longa, lata, ſolida, atque omnino locum occupantia. Quare geometricé & phiſicé judicavit Ariſtot. cũ docuit magnitudines revera phyſicas eſſe, ſed abſtractas à cæteris phyſicis qualitatibus á geometris mente conſiderari: & contrá geometricas magnitudines phyſicis qualitatibus permiſtas á phyſicis ſenſu in corpore ſenſili tractari. Sic Ariſtoteles 2 cap 2. phyſ. Lineam geometricam ab Optica diſtinguit. Geometría (inquit) conſiderat lineam phyſicam, at non quatenus phyſica eſt: Optica autem conſiderat lineam geometricam quidem, non autem quatenus geometrica eſt: ſed quatenus phyſica. Sic igitur Ariſtoteles de abſtractione mathematum philoſophatur. Neque verò in hac logica abſtractione (quæ conſtituendæ doctrinæ cauſſa inſtituitur) geometra mentitur, ſed craſsis ſymbolis, & notis, & exemplis punctorum, linearum, ſuperficierũ, corporũ abutitur ad res notis illis ſignificatas explicãdũ: ꝙ Ariſtoteles monuit in prioribus 1 lib 39 cap. & in poſterioribus 1 lib 8 cap. & in phyſicis 2 cap 2. lib. & in philoſophia 3 cap 13 lib. & 2 c 14 l. Deniꝗ tota ἀφαίρεσις geometrica eſt logica, quæ cõſiderat genera generaliter, & ſola mẽte cõcipit, generũ tamen eſſentiã & veritatẽ docet in ſingularibus conſiſtere. & ſi quid omnino logicis legibus contrariũ geometria profiteretur, id ἄλογον planeque abſurdum judicarem. Quare cũ magnitudo geometrica ſit in infinitum dividua, ἀφαίρεσις neque phyſicas magnitudines tollit, neque interea quidquam mentitur.

6. *Punctum eſt ſignum in magnitudine individuum.*

Euclides.

Euclides 1.d.1. id ipſum comprehendit, cum ait, ſignum eſſe cujus nulla pars ſit. Neque tamen abſolute σημεῖον ſignum (ut Euclides) appellamus, ſed punctum dicimus, quia Platoni & Ariſtoteli στιγμὴ punctum eſt pro eodem hic proprium. Punctum verò ut definitur, phyſicum & ſenſu perceptibile nullum eſt, quia ſenſus tantum corpus ſentit & ſi quid ſenſu minimum ſit, punctum phyſicum dicitur. Quare punctum quidem nulla eſt magnitudo, neque id ipſum eſt, quod creta pingitur, pictumque oculis cernitur, ſed quod in magnitudine individuum cōcipitur & cogitatur. Ac quamvis ſit magnitudinis expers, magnitudinis tamen omnis eſt principium & principium potentiâ: fluxu ſiquidem motuque puncti linea deinde exoritur, ex qua ſuperficies, unde corpus. Itaque Ariſtot. 14 cap 1. Top. punctū ait eſſe idē in linea, quod unitas eſt in numero: utrumque enim principium: unitatē enim principium numeri ajunt eſſe & pūctum lineæ. Proinde & Pythagoreis (ut eſt apud Proclum) punctum definitur unitas habens ſitum.

7. *Magnitudines ſymmetræ ſunt, quas eadem menſura metitur, aſymmetre contrá* 1.2 *d.* 10.

Magnitudinum inter ſe eſt á numeris ſymmetria & ratio: á ſeipſis autem congruentia & adſcriptio, ſed menſura magnitudinis tantum eſt θέσει, & arbitrio geometræ ſtatuētis digitū, palmū, pedē, aut aliud quodlibet pro mēſura. Ergo duæ magnitudines, altera pedalis, altera bipedalis ſunt ſymmetræ, quia magnitudo pedis unius utramq; metitur, primam ſemel, ſecundam bis. At quædam magnitudines menſuram communem non habent, ut diagonius quadrati & latus ad 116 p 10. actu aſymmetra ſunt, quæ Ariſtoteli propoſitio eſt in ore perpetua. Diagonius tamē & latus potentia ſymmetra ſunt, per ſua nempe quadrata, quia quadratum diagonii duplum eſt ad quadratum lateris.

8. *Rationales ſunt quarum ratio eſt explicabilis numero datæ menſuræ, irrationales contrá.* e 5 *d* 10.

Data menſura Euclidi dicitur ῥητὴ id eſt dicta, definita, certa, quæ nempe numero expreſſa ſit, famoſa nempe quæ prius dicta eſt, velut ſignum propoſitum confeſſumque (ut ait author de lineis individuis) á qua menſura capitur (ut ait Theon ad 11 p 10.) Atqui hæc menſura rationalis eſt ſibi ipſi, ut ſunt omnes magnitudines inter ſe æquales: Ideoq; vulgó rationalis dicitur, ſed ratione obſcuriore, cum reipſa terminus rationis unicus appareat: manifeſtiore autem ratione magnitudines rationales dicuntur, quæ ſymmetræ ſunt ad datam mēſuram, ſicut ait idē author de lineis individuis, lineas rationales vel irrationales πρὸς ἀλλήλας inter ſe dici: quod nuſquam tamen Euclides ſatis aperte propoſuit. Sic Marinus in protheoria datorum ait ῥητὸν eſſe, quod ſecundúm aliquem numerum cognoſcimus, & ſecundúm aliquam poſitione menſuram, ut ſecundúm palmum verbi gratia vel digitum: ſic apud Pachymerium definitur ῥητὴ per numerum nota. Sic in muſicis Ptolemæus definit rationalè, cujus menſura accuratius nota ſit. Irrationales igitur magnitudines cōtrá intelligantur, ut latus la-

teris quadrati 20 pedum ad datam bipedalem, qualium irrationalium magnitudinum genera tredecim libro decimo elementorum docentur: ſic ad noſtram hanc definitionem quamvis ad Euclide nequaquam ſatis expoſitam ad 6. 11. 16.17 p 13. ſegmenta rectæ proportionaliter ſectæ ſunt irrationalia ad totam rationalem: diameter in circulo rationalis eſt, irrationalis ad latus inſcripti quinquanguli: diagonius icoſaedri & dodecaedri eſt irrationalis ad latus. Atque horum omnium ratio quidem eſt, ut ratio duarum quarumlibet quantitatum, ſed cũ ſit inexplicabilis numero, ſatis fuerit generali notitia irrationales noſſe: qua ſpecie aut differentia ἀλογίας, ad finem geometriæ nihil attinet.

9. *Magnitudines congruæ ſunt, quarum partes applicatæ partibus æqualem locum occupant.*

Symmetria igitur & ratio á numeris fuerunt, proximæ magnitudinum affectiones geometricæ omnino ſunt: in congruentia veró latus logice & ſitus intelligatur, qui ſit corporis, ſuperficiei, lineæ: imo vero etiam puncti. Et ſic Euclides in Datis ait dari ſitu, quæ ſemper eundem locum obtinent: & nominatim ſic puncta, ſic lineas, ſic ſuperficies dari profitetur. Igitur ἐφαρμόσεις vel ἐφαρμογὴ congruentia, ut Euclidi & Proclo dicitur, eſt duarum magnitudinũ, quãdo prima primis, media mediis, extrema extremis, partes denique partibus uſquequaque reſpondent. Sic lineæ congruunt, quando puncta terminãtia punctis, toteque longitudines totis longitudinibus eundem locum occupant. Sic ſuperficies congruunt, quando lineæ terminantes lineis terminantibus, areæ terminatæ areis terminatis eundem locum occupant. Congruentia denique dicũtur ſeu potentia ſeu actu, ut ſeparatæ lineæ rectæ æquales, quæ ſic applicari poſſunt. Atque in lineis & ſuperficiebus ἐφαρμόσεις multis in geometria locis uſurpatur. Imprimis hinc oritur axioma illud axiomatũ Euclidi primum, Quæ eidẽ æqualia: applicatione enim & ἐφαρμόσει magnitudinibus id convenit: Sic 17 d 1. congruunt in Proclo ſemicirculi per diametrum diſſecti: ſic triangula in Euclide ad 4 & 8 p 1. ex quarum propoſitionũ fundamẽto innumerabilia deinceps concludũtur, ut eorum omnium, fundamentum ſit ἐφαρμόσεις. Triangula item in Pappo ad 5 p 1. congruunt: Sic commune ſegmentum duabus rectis congruit ad 35 p 1. ſic ſecũdo libro primę propoſitiões planorũ æqualitatẽ approbãt: ſic ſectiones circulares ad 24 p 3. congruunt: ſic peripheriæ duæ & totidem circuli congruunt ad 30 p 3. Sic ad 11 & 15 p 4. congruunt, illic quinque, hic ſex circuli: Sic (ut è lib. 10 patet) omnes magnitudines ſymmetras, quas quidem ſine multiplicatione vel proportione metiare, ἐφαρμόσεις metitur: Sic ἐφαρμόσεις adhibetur 1 p 11. Sic ἐφαρμόσεις poſtea erit menſura æqualium angulorum, quæ ipſa fere geometriæ anima eſt. Sic Archimedes 8 th. 1. Iſorr. ἐφαρμόσειν habet triangulorũ, & 20 th. in ſphæroidibus ἐφαρμόσειν ſphæroidum. Quin Archimedi 1 Iſorrop. axioma quintum eſt: æqualibus & ſimilibus figuris planis cõgruentib. inter ſe, & centra ponderum congruunt inter ſe. Itaque ex innumerabilibus congruentibus & lineis fit unica linea, & ſuperficiebus una ſuperficies. Sic Vitellio cum illis Euclidis exemplis conſentiens poſtulat libro primo, cum duæ ſuperficies pla-

cies pla-

cies plagæ ſe contingunt, unam ex eis fieri ſuperficiem. Corpora verô ſi congruant, videntur tantum congruere per ſuperficies, & ſic 10 d 11. corpora definiũtur æqualia, quæ comprehenduntur á ſuperficiebus æqualibus multitudine & magnitudine. Et tamen hoc ipſo, quod æqualia ſunt, eundem & æqualem locum occupant. Et ſic 1 d 1. de gravi & levi, corpora definiuntur magnitudine æqualia, quæ locum replent æqualem. Hoc ἐφαρμόσεως genere corpora liquidorũ ſiccorumque omnium metimur, replendo nempe æqualem locum. Sic monetarii monetas ex ęquipondiis laminis æqualis loci repletione æquales judicãt. Attamen Archimedes antea citato loco Sphæroïdum ἐφάρμοσιν facit, & à Commandino noſtro Archimedis centrobarica imitato poſtulatur: Solidis figuris ſimilibus & æqualibus congruentibus centra quoque gravitatis inter ſe cõgruere: ſed tamen ἐφάρμοσις iſta, ut antea ἀφαίρεσις, mẽtis tantũ eſt, & magnitudinũ mente abſtractarũ, non ſenſilium & phyſicarum, quæ ſingulas partes ſenſili loco diſcretas habent, ut corpora duo phyſica ſimul eſſe nequeant. Phyſicum autem & ſenſile tactu nihil eſt tantum lineare, aut ſuperficiarium tantum, ſed corporeum eſt, quicquid eſt phyſicum. Itaque

Magnitudines congruæ ſunt æquales. 8. axi.

Poteſt minor recta majoris parti congruere, neque toti æqualis eſſe, ſed tantæ æqualis eſt quantæ congruit, nec tamen axioma iſtud reciprocum eſt, neque congruentia atque æqualitas reciprocantur. Triangulũ parallelogrammo æquari poteſt, neque tamen omnino congruere: & ſic circulo quæritur æquale quadratum quamvis incongruum, quia ὁμοειδῆ ſimilia ſpecie tantum congruere poſſunt, ut Proclus ait ad 4 p 1. Itaque etiã parallelogramma non congrua poſſunt æquari, ut patet ad 35. 36 p 1. Neque vero nobis ἐφαρμόσεως axioma quiſquam repudiet tanquam mechanicum, neque ideo geometricum. Nam Archimedem cum Euclide copulare libuit, & artis utilitatem cum veritate artis cõjũgere. Neque iſto principio quicquam in geometria luculentius eſt, primaq; omnino geometrica menſura, quæ granis, digitis, palmis, pedibus, cubitis, paſsibus, decempedis, & ſimilibus efficitur, ἐφαρμόσεως utique judicio efficitur, & falſum eſt, mechanicum quod ſit, geometricum non eſſe: poſtulata enim & problemata omnia (quod geometricorum & principiorum & propoſitionũ genus alterum eſt) mechanica ſunt: & cum theorematis differentiã vulgo habent, quod hæc contemplantur, illa fabricantur & machinantur. Symmetria & ratio totæ mechanicæ ſunt, dum eadem menſura diverſas magnitudines metiuntur, & comparãdo numerant. Itaque ἐφάρμοσις tota geometrica eſt, ut tot locis jam patuit, nec regulæ & circini (quibus omnia geometræ problemata fabricas & machinas ſuas fabricantur & machinantur) vis alia atque alia facultas eſt, quam ἐφαρμόσεως geometricæ: ut qui ἐφάρμοσιν à geometrica ſchola expellit, expellat ex eadem Euclidem & Archimedem, imo geometriam ipſam. Geometrice tamen agere non videatur qui mechanicam à geometricis principiis ſejũxerit, ut vulgo ſolent imperiti opifices, & pleriſque in rebus etiam mathematici, ut

tici, ut cum ſinè geometriæ principiis, ſolis inſtrumentis inveniunt duas medi as continuè proportionales: Hic verò geometricum eſt principium ab Euclide & reliquis geometris approbatum.

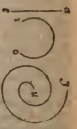
10. *Magnitudines adſcriptæ ſunt inter ſe, quando unius termini alterius terminis terminantur: quæ intra eſt, dicitur inſcripta: circumſcripta, quæ extra.*

Sequitur adſcriptio, cujus ſpecies ſunt inſcriptio & circumſcriptio. Hęc igitur definitio generalis facta eſt è ſpecialibus ſeptem definitionibus de inſcriptione rectæ in peripheriam 7 d 4. de inſcriptione & circumſcriptione rectilineorum inter ſe 2 d 4. de adſcriptione rectilinei & circuli 3. 4. 5. 6. Adſcriptione rectilineorum inter ſe Euclides non utitur in elementis: utitur autem 13. lib. adſcriptione corporum ordinatorum in ſphæram: neque tamen uſquam definit. Definitio itaque generalis ab Euclide veritatem generalem accipiet, ut intelligamus rectã in periphæria terminari punctis, quomodo Ptolemæus vocat inſcriptas circulo, & rectilineum terminari ſuis rectis, & circulum peripheria, & corpus planum ſuis planis ſuperficiebus, ut poſtea patebit. Homogenea autem tantum inter ſe rectitermina & cum rotundo propriè adſcribuntur. Heterogenea tamen lib. 15. adſcribuntur, quinque nempe ordinata corpora plana inter ſe & recta inſcribitur peripheriæ & triangulo. Adſcriptionis verò rectilinei & circuli uſus ſingularia myſteria tandem declarabit per rationes adſcriptorũ, quæ clavis erit quædam præſtantiſsimæ per ſubtenſas vel inſcriptas circulo (ut Ptolemæus loquitur, vel ſinus, ut recentiores appellant) doctrinæ.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. II.
de Linea.

Magnitudo eſt linea aut lineatum.
Communes affectiones magnitudinis expoſitæ ſunt: ſequitur dichotomia, quæ adhuc nobis occurrit.

2. *Linea eſt magnitudo tantum longa.*



Vt ſunt *ae. io, uy.* Talis autem magnitudo (ait Proclus ex Apollonio) concipitur dimenſione viarum, differentiaque loci luminoſi à tenebricoſo: Euclidi 2 d 1 definitur linea longitudo latitudinis expers: & quidem longitudo propria eſt differentia lineæ, ut latitudo ſuperficiei, ſoliditas corporis.

3. *Lineæ terminus eſt punctum.*

Euclides 3 d 1. lineæ extrema ait eſſe puncta: antè verò de termino generaliter locuti ſumus, & nunc lineæ proprium intelligatur punctis terminari. Peripheria autem cum nec initium nec exitum habeat

videt pũctis nõ terminari: at cũ deſcribitur, á pũcto aliquo incipit, & in aliquod pũctũ deſinit. Quare pũctũ eſt terminus lineæ, modo actu; ut in linea recta, modo potẽtia, ut in peripheria perfecta: Imo vero, ut antea patuit in cõtinui definitione, punctis quælibet lineæ ſeu rectæ, ſeu obliquæ cõtinẽtur. Linea vero lineatur motu puncti. Omnis enim magnitudo generaliter geometrico motu creatur, ut jam dictũ eſt, & deinceps per ſpecies patebit, ut fiant uno motu totæ figuræ, ut converſione circulus, ſphæra, conus, cylindrus multiplicatione baſis & altitudinis rectangula parallelitermina.

4. *Linea eſt recta vel obliqua.*

Partitio eſt é 4 d 1. Vbi rectitudo attribuitur lineæ, tanquam inde ſuperficies & corpus rectitudinem aſſequantur: & certe ſic Euclides videtur probare 17 p 13. quinquangulum dodecaedri eſſe planum, id eſt rectum, quia rectam capiat, quod & Proclus ad 7 d 1 indicat. Corpus planum id eſt rectum, definitur á ſuperficie plana 9 & 10 d 11, & ſic omnino rectitudo ſolidæ figuræ poſtea intelligetur per rectam á vertice in centrum baſis perpendicularem. Itaque rectitudo eſt lineæ, ideoque & obliquitas, unde ſuperficies recta vel obliqua, & corpus rectum vel obliquum judicatur.

5. *Linea recta eſt linea, quæ intra ſuos terminos æqualiter interjacet: obliqua contrá. 4 d 1.*



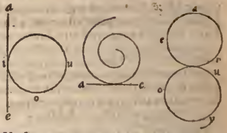
Aequaliter autem intra ſuos terminos interjacet linea, quãdo non hic humilior, illic altior; ſed æqualis eſt ſpatio intra duos terminos comprehẽſo: ut hic a e. Sic qui rectum iter facit, vulgò dicitur tantum itineris conficere: quantum neceſſe eſt, qui facit obliquum pluſquam, oporteat, ut Proclus ait. Itaque

Recta eſt breviſſima intra eoſdem terminos.

Conſectarium eſt Archimedeum ad 1 poſt 1 de ſphæ. & ſic Platoni poſtque Platonem Euclidi in catoptricis linea recta eſt, cujus media extremis officiunt, ut in ſolis ellipſi ſi linea recta á ſole per lunam ad oculum noſtrum duceretur, media ipſa luna noſtris luminibus officeret, ſoliſque aſpectum nobis ad meret, quod ex opticis ſumptum eſt, in quibus docetur viſum rectis radiis fieri. Itaque quod Euclides definit rectum in linea per æqualem inter puncta tanquam diceres interjacentiam, id eſt per æquale intervallum, illud ipſum eſt Archimedi breviſſimum intra eoſdem terminos, quodque Platoni & Euclidi medium extremis officit.

6. *Linea obliqua tangitur à recta vel obliqua, quando ambæ ita concurrunt, ut continuatæ non interſecentur.*

Tactus proprius eſt obliquæ lineæ ad lineã rectã vel obliquã, ut cõſtat é 2 & 3 d 3. Recta circulum tãgere dicitur, quæ tangẽs circulum & producta non ſecat circulum, 2 d 3: ut hic *ae* recta tangit peripheriam *iou*, & *ae* tangit helicen. Circuli ſeſe tangere dicuntur, qui tãgentes ſeſe non ſecant, 3 d 3. Vt hic peripheria *aei* tangit peripheriam *ouy*. Hæ ſpeciales Euclidis definitiones circulum pro peripheria nominãt, & tactum á ſectione, & ſectionis potentia diſtinguũt. Alioqui tactus verbum etiã in elementis commune eſt pro quolibet concurſu: ſic 8 d 1 angulus planus definitur inclinatio linearũ ſeſe tangentium in plano.



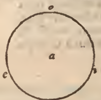
Tactus fit unico puncto. é 13 p 3

Conſectarium protinus é definitione intelligitur, alioqui ſectio eſſet non tactus. Sic Ariſtoteles in mechanicis ait rotundum eſſe mobiliſsimum & velociſsimum, quia minime tangatur á ſubjecto plano.

7. *Linea obliqua eſt peripheria aut helix.*

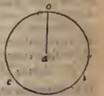
8. *Peripheria quæ diſtat æqualiter á medio comprehenſi ſpatii.*

Vt eio diſtat æqualiter ab *a* medio comprehenſi ſpatio.



Peripheria fit converſione lineæ altero termino quieſcente, altero lineante.

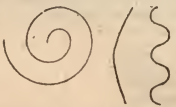
Vt in *eio* maneat punctum *a*, & convertatur linea *ao*, ita ut punctum *o* imprimat veſtigium, fiet peripheria *eoi*. Ex hac fabrica Euclidi peripheria definitur 15 d 1. & ſic ſphæra, conus, cylindrus eidẽ definiũtur. Linea vero quæ convertitur, recta vel obliqua eſſe poteſt in plano: obliqua duntaxat eſt in ſphærico: in conico autem & cylindraceo recta poteſt eſſe, ut latus eſt coni & cylindri. Itaque in cõverſione lineæ peripheriam procreantis ſpectatur tãtum intervallum: imo puncta duo, alterum in centro, alterum in

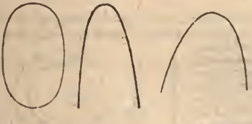


ſummo, quæque ideo Ariſtoteles 10 cap 8. Phyſ. nominat rotundi principia.

9. *Helix eſt quæ diſtat inæqualiter á medio utcunque comprehenſi ſpatii.*

Hæc aũt tortuoſa linea ἑλικοειδὴς Proclo dicit̃, at helix etiã dici poteſt, cujus variæ ſpecies ſunt, ut Arithmetica quæ eſt Archimedis helix, ut cõchois, ut cittois: quæ in geometria ſuos poſtea authores habuerunt Archimedem, Nicomedem, Geminum. Linea autem τετραγωνίζουσα (cujus ope circulus quadratur) & admirabilis, celebrantur: τετραγωνίζουσαν Dinoſtrato, Nicomedi, Hippiæ. Pappus initio tertii & Proclus 9 p 1 attribuunt. Pappus admirabilem attribuit Menelao: Conicæ veró ellipſis, hyperbole, parabole, quales hic ſunt, attribuuntur Menechmo. Apollonius eas libris 8 complexus eſt, quas omnes miſtas lineas, ut explicatu enumeratuq; difficiles Euclides prætermiſſit, ait Proclus ad 9 p 1.





10. *Lineæ inter ſe rectæ ſunt, quarum altera in alteram incidens æqualiter interjacet: obliquæ contrá.* é 10 d 1.

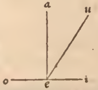
Adhuc affectiones unius & ſolius lineæ fuerunt rectitudo & obliquitas: duarum inter ſe affectiones ſunt perpendiculum & paralleliſmus, qualeſcunq; ſint rectæ vel obliquę: perpendiculum primo definitur generaliter. Sic duæ rectę in plano perpendiculares ſunt. Vt *a e* & *i o*. Sic duę peripheriæ in ſphærico erunt perpendiculares, quando altera in alteram incidens æqualiter interjacebit, nec quoquam inclinabit. Sic recta peripheriæ perpendicularis fuerit, ſi incidens neutro acclinet, ſed æqualiter interjaceat. Denique ut de primo & compoſito numero, primiſq; inter ſe & compoſitis inter ſe numeris dictum eſt, duos primos eſſe primos inter ſe, item duos primum & compoſitum, denique cõpoſitos ipſos poſſe inter ſe primos eſſe: ſic duæ rectæ poſſunt eſſe rectæ inter ſe, ſic item recta & obliqua, denique obliquæ duæ. Atque omnino lineæ inter ſe rectæ



& perpendiculares pro eodem dicuntur, & à perpendiculo linearum perpendiculum ſuperficierum ſumitur, ut patebit poſtea. De corporum perpendiculo nullum eſt in elementis verbum, attamen etiam corpus rectum corpori judicatur per lineam perpendicularem. Itaque

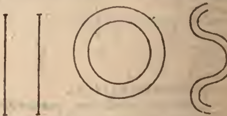
Si recta eſt perpendicularis rectæ, eſt ab eodem termino & eadem parte ſingularis. é 13 p 11.

Nã ſi plures eſſent, altera acclinaret, neque æqualiter interjaceret: ut hic vides in rectis *ae, io, eu.* Proclus ad 17 p 1.



11. *Lineæ parallelæ ſunt, quæ ubique diſtant æqualiter.* é 35 d 1.

Sequitur parallelíſmus communis omnium linearum rectarum & obliquarum: ut hic vides in rectis & obliquis. Parallelíſmus autem è perpendiculo derivatur, & ei valde affinis eſt. Itaque Poſidonius cõmuni perpendiculo definiebat parallelíſmũ: quæ vis noſtræ definitionis eſt. Et ſic Euclides circulo inſcriptarum à centro æquidiſtantiam metitur æqualibus perpendiculis, 4 d 3. Sic etiã ad rem multo propius Euclides idem metitur parallelorum altitudinem & diſtantiam 4 d & 1 p 6: Sic enim dicũtur 1 p 6 æquealta, quæ 35.36. 37.38.39. 40.41 p 1 dicũtur eſſe intra eaſdem parallelas. Sic 6.8.14 p 11 dijudicat parallelíſmum communi perpendiculo, ubi & parallelíſmus ſuperficierum erit è parallelíſmo linearum. Corporum parallelíſmus in elementis nuſquam appellatur, ſicuti neque perpendiculum appellatum eſt. Eſt tamen & quidem è parallelíſmo linearum, magnicꝫ uſus in Optica, Mechanica, pictura, architectura per lineas nempe parallelas. Sic Vitellio 7 4 p 1 ſphæras parallelas appellat, ſed ſphæras concentricas, & corpora potius ſpherica quàm ſphæras. Nam cava ſunt intus illa corpora, non penitus ſolida: Denique ſic appellat ſphæras parallelas, uti peripherias concentricas parallelas diceres. Parallelíſmus igitur, ut è definitione patet, eſt linearum, indecꝫ ad ſuperficies & corpora, ut rectitudo & obliquitas & perpendiculum transfer-



transfertur: ſecus ſi quid dicitur, ſenſus tamen huc reſpicit, ut cum Vitellio ad definitiones 6 l & ad 49 p 6 dicit lineam rectam eſſe parallelam ſphæræ, intelligit quando eſt parallela rectæ ſphæram tangenti, & ſic rectarum inter ſe etiam tum parallelismus eſt: non eſt vero prætereunda etymologia παραλλήλων. Nam παράλληλα contra ſe, & é regione poſita dicuntur, ſæpeque authores ſine compoſitione ſic uſurpant. Sic Ariſtoteles appellat γραμμὴν παρὰ τὴν γραμμὴν pro lineis parallelis lineam contra lineam. Quomodo & Euclides loquitur ad 10 & 15 p 11, & multo ſæpius in opticis: ſic in Datis, & ſic poſt Euclidem Archimedes & Apollonius loquuntur. Itaque

Lineæ eidem parallelæ ſunt inter ſe parallelæ.



Hoc elementum proponitur ſpecialiter de lineis rectis, & demonſtratur 30 p 1. At per additionem æqualium diſtantiarum æqualis diſtantia nota eſt, ut hic.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. IIII de Angulo.

Lineatum eſt magnitudo pluſquam longa.

Nova doctrinæ forma coëgit novis uti plerumque vocabulis, præſertim in partiendo, ut ad logicam perfectioris partitionis legem dichotomia teneretur. Itaque magnitudo biſecatur in lineã & lineatũ, & lineatũ genus erit ſuperficiei deinceps & corporis: lineatũ quippe, in quo lineæ ſint. Poſſunt enim duci lineæ in ſuperficie, quod proprium eſt linearum ſolum, poſſunt in corpore, ut diameter in priſmate, axis in ſphæra, omninoque ſublimes lineæ. Ideoque Proclus ad 4 d 1, item 12 & 35 p 1 lineas facit alias planas, alias ſolidas. Sic conicæ lineæ, ellipſis, hyperbole, parabole, ſolidæ vocantur, quia oriuntur é corporis ſectione.

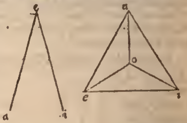
2. *Lineati eſt angulus & figura.*

Communes affectiones magnitudinis fuerunt terminari, ſecari, commenſurari, congruere, adſcribi: deinde lineæ dirigi, obliquari, tangi, converti, torqueri, quæ omnia etiam in lineato ſunt per lineam. Lineati eſt angulari & figurari. Angulus porro & figura in tota ratione geometricarum rerum utramque

fere paginam faciant. Itaque diligenter utrumque conſiderandum eſt.

3. *Angulus eſt lineatum in communi ſectione terminorum.*

Sic angulus ſuperficiarius eſt ſuperficies in communi ſectione duarum linearum, ſic angulus ſolidus eſt corpus in communi ſectione trium minimum ſuperficierum. Sic angulus *a e i* ſuperficiarius eſt. ſic angulus comprehenſus à tribus ſuperficiebus *a o i, i o e, a o e* ſolidus eſt, neque ſuperficies duarum dimẽſionum una recta linea, neque corpus trium dimenſionum duabus ſuperficiebus ſaltẽ planis terminatur. Hæc generalis eſt definitio anguli, qui totis mathematis tractatur, ubi angulus biſecatur, ubi æqualis major, minor inſtituitur. Hæc (inquam) generalis eſt definitio anguli, quæ quantum negotii veteribus mathematicis exhibuerit, oſtendit ipſorum inter ipſos cõtroverſia apud Proclum 8 d 1. Carpus angulum definiebat intervallum ſub inclinatione terminorum ad unum. Apollonius & Plutarchus Carpum ſequebantur, illud (ad unum) interpretati primum. Proclus præceptorem Syrianum (opinor) ſequutus licet verbo longiſsime ab iis diſſentire videatur, tamen reipſa huc accedit, dum angulum ſuperficiarium definit ſuperficiem in uno ſigno ab inclinatis lineis collectam, ſolidum ab inclinatis ſuperficiebus. His igitur authoribus angulus definiatur lineatum in communi ſectione terminorum. Carpi vero ad unum, Apollonii & Plutarchi primum intervallum erat adverſus elenchum, ne totum lineatum ubique angulus eſſe diceretur, ſed tantum in ipſo communis ſectionis puncto, ubi terminatur ab inclinatis terminis. Euclides 8 d 1 & 11 d 11 definit angulum inclinatione lineatum, in quo reprehenditur à Proclo. Cauſſa dicetur in ſcholis.



4. *Crura anguli ſunt termini comprehendentes angulum.*

Crura σκέλη dicimus baſi anguli inſiſtentia, quæ in triangulo æquicruro tantum nominavit Euclides, latera alias appellat. At proprietas ut rei, ita ſermonis placet. Sic in exemplis poſitis duæ lineæ ſunt *e a, e i* crura ſuperficiarii anguli: ſic ſuperficies tres *a e i, i e o, a e o* ſunt crura anguli ſolidi. Itaque crura angulantia ſunt lineæ, aut ſuperficies: angulata autẽ lineata ſunt ſuperficies aut corpora.

5. *Anguli homogenei ſunt anguli cruribus & crurum concurſu genere iidem.*

Itaque homogenia iſta duplex eſt, prima crurum, ſecunda concurſus: ſic anguli recti rectilinei ſunt homogenei inter ſe. Recti autem rectilinei rectis obliquilineis ſunt heterogenei, ſic non omnes obtuſi omnibus obtuſis, nec omnes acuti omnibus acutis homogenei ſunt: niſi adſit homogenia & crurum & concurſus. Lunularis ſyſtroidi & pelecoidi crurib. eſt homogeneus: quilibet enim comprehenditur á peripheriis: lunularis altera concava, altera convexa, ut *i a e*

ſyſtroides

ſyſtroides ab utraque convexa, ut *iao*: pelecoides ab utraque concava, ut *eau*. Lunularis tamen concurſu eſt heterogeneus ſyſtroidi & pelecoidi. Itaque & abſolute heterogeneus. Hæc igitur diſtinctio præcedat ad diſtinctionē ſequentium. De homogeneis igitur angulis ſolis ſequentia ſunt, ne ſæpius idem verbum repetatur.

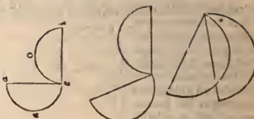


6. *Anguli cruribus congrui ſunt æquales.*

Hoc axioma prætermiſſum in elemētis geometricis magnas obſcuritates peperit: bene autem & ex ordine conſtitutum permagnam lucem afferet. Eſt igitur è prima illa *ἐφαρμόσεως* luce. Nam ſi bis bina crura congruant, non quatuor, ſed duo crura erunt: neq; tam duo anguli æquales quam angulus unus. ſed enim axioma iſtud æqualium angulorum jam olim in ſcholis mathematicis agitatū eſt, ut patet è Proclo ad 4 p 1. Illic enim ſic loquitur Proclus: Angulus rectilineus rectilineo æquatur, quando crure altero alteri ſuperpoſito reliquum reliquo congruit, cum reliquum crus cadit extra, angulus eſt major extra cadentis cruris: cum vero cadit intra, minor: illic enim comprehendit, hic comprehenditur. Angulorum igitur rectilineorum æqualitas ſumetur ſecundum congruentiam crurum in rectilineis: item in cæteris omnibus, qui ſunt *ὁμοειδεῖς* ejuſdem ſpeciei. Hic igitur Proclus affirmat æquales angulos, quorum crura applicata congruunt, quod noſtrum axioma eſt, & *ὁμοειδίαν* notat, quam diximus *ὁμογένειαν*. Veritas autem axiomatis hujus eſt è congruentiæ axiomate. Quia duo linea ta hic unum eſt *ἐφαρμόσαι*. Itaque axioma iſtud illinc erit immenſæ quidē lucis & utilitatis. Nam materies 4.5.6.7.8.9.10.11.12.18.19.21.23.24.25.26.p 1 ex iſta generali luce lucem accipiet, & ſi de pyramide in ſolidis ſimilia docerentur, indidem lucem etiam caperent. Ergo quod generale & commune eſt tam multis elementis, præponitur, quod ſpeciale eſt, hinc poſtea derivatur facilitate prorſus admirabili, ſi quis myriades ſyllogiſmorum Euclideorum & directè & per impoſsibile concludentium cum brevibus conſectariis noſtris comparet. Congruentia tamen & æqualitas angulorum non reciprocantur. Nam rectilineo recto lunularis æquari poteſt, ut Pappus apud Proclum in axiomate de angulis rectis docet: ut hic vides.

Nam an-

Nam anguli ſemſcirculorum æqualium *ieo* & *aeu* æquantur, quod ἐφαρμοσις oſtendet: cõmunis eſt angulus *aeo* recto *aei*, & lunulari *aueo*: addatur igitur utriq; cõmunis *aeo* æquabitur rectus *aei*, lunulari *aueo*. Poteſt vero & idem lunularis æquari obtuſo & acuto, ut idem argumentum demonſtrabit.



Itaque

1. *Si angulus angulo æquicrurus æquatur baſi, eſt æqualis, & ſi eſt æqualis, æquatur baſi. ex 8 & 4 p 1.*

Nam cruribus erunt congrui, & baſibus item congrui.

Et

2. *Si æqualis baſi eſt æquicrurus, æquatur.*

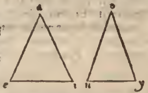
Nam congruentia eadem eſt: non tamen ſi æquales æquãtur baſi, ſunt æquicruri, ut in angulis in eadem ſectiõe apparebit, ut hic: & ſic é duabus æqualitatibus prima reciprocatur, ſecunda non item.



Et

3. *Si angulus angulo æquicrurus eſt major baſi, eſt major, & ſi major, eſt major baſi, é 25 & 24 p 1.*

Vt hic *aei* major baſi quàm *ouy*.

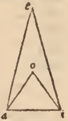


Et

4. *Si æqualis baſi eſt minor interioribus cruribus, eſt major.*

Vt hic interior *aoi* eſt major exteriore *aei*: interioribus autem additur neceſſario:

ceſſario: ſecus apparebit error in illa ſectione. Ex eodem illo congruentiæ axiomate, hæc rurſus omnia deducuntur, quod Proclus ad 8 p 1 luculenter expoſuit. Videtur autem (ait) æqualitas crurum & baſium facere æqualitatem verticalium angulorum. Neque enim ſi baſes ſunt inæquales, æqualitas crurum eoſdem angulos relinquit: At ſi minor ſit baſis, angulus decreſcit: ſi major, augetur: neque ſi baſes ſunt æquales, crura inæqualia: angulus manet: at dum imminuuntur, augetur: dum augentur, imminuitur: Cõtrarium enim accidit angulis & angulorum cruribus. Nam ſi crura in eadem baſi deorſum depreſſa cogites, ipſa quidem minuis, eorum vero angulum auges, majoremque ipſorũ inter ipſa diſtantiam facis: Sin cogites ſurſum erecta atque aucta, angulum minuis. Quanto enim amplius coincidunt, tanto magis à baſi vertex removetur. Quare certum ſit affirmare, quod baſis eadem & crura æqualia definiunt æqualitatem angulorum. Hic Procli locus facit æquales angulos æqualitate crurum baſiumq;, ut anguli ſint æquales, qui crurum æqualium baſes habent æquales. Nam homogenea æqualitas crurum eſt ipſa congruentia, ſed á Proclo homogenia prætermittitur, ſine qua tamen conſectarium falſum ſit. Quare axioma congruentiæ præponimus, & ex eo conſectarium hoc, ſed emendatum deducimus. Veruntamen ad ejus conſectarii conſtantiam commentarii veterum é Proclo non ſunt potius excutiendi, quam Euclides ipſe ad 23 p 1 & 26 p 11 attendendus: cum ex hac æqualium angulorum materia nõ conſectarium poſtulat, ſed demonſtrabilẽ propoſitionẽ duplicem de rectiterminis angulis facit. Interroga nempe Euclidẽ ad 23 p 1, quomodo dato angulo rectilineo æqualẽ facturus ſis, reſpondebit, ſi crurum æqualium baſes æquaveris: idemque ad 26 p 11 de ſolido angulo plano Euclides profitetur. Itaque Euclidi magna gratia pro tãto beneficio à geometris debeatur: unde licebit magnã poſtea variarũ propoſitionum familiam derivare, neque vereamur ne objiciatur hoc axioma ab Euclide demonſtrari. Nullo enim antecedente elemento utitur Euclidis demonſtratio, quod poſtulandum non fuerit, ut illic intelligetur, & tamen materies ex axiomate protinus poſtulanda fuerat. Itaque & nos poſtulavimus, & fabricam tamen interea æquandi anguli non minus geometricam retinemus, ſic de problemate maledubitato αἴτημα per ſe indubitatum facimus. Oenopides aũt problematis de æquando angulo primus author á Proclo efficitur, de cujus inventis in procemio dictum eſt.



Itaque

5. *Si dati anguli cruribus ad datum punctum crura homogenea æquẽtur æqua baſi, æquabunt angulum dato. é 23 p 1. & 26 p 11.*

7. *Angulus eſt rectus vel obliquus.*

8. *Rectus cujus crura ſunt inter ſe recta, obliquus contra.*

c Rectus

Rectus angulus eſt aio & oie.



Itaque

Anguli recticruri recti ſunt æquales.

Axiomata de æqualitate angulorum tria jam fuerunt, unum generale, duo conſectaria: Hic de æqualitate rectorum angulorum ſpeciale præterea unum eſt. Angulos homogeneos recticruros, id eſt quorum crura ſunt recta, ut lineæ rectæ, ut ſuperficies planæ (hoc enim verbum nobis concedatur) rectos æquales eſſe: ſic anguli rectilinei recti propoſiti ſunt æquales: ſic anguli ſolidi plani recti, ut in cubo, ſunt æquales. Axioma igitur commune poteſt eſſe etiam de ſolidis angulis modo recticruris: quia non omnes ſemicirculares recti omnibus ſemicircularibus rectis ſunt æquales: ut hic cũ diameter ſit cõtinuata perpendicularis eſt, & facit bis binos intus foriſque externos æquales inter ſe, & interiores æquales inter ſe, ſed externos interioribus inæquales, & majoris ſemicirculi angulus major eſt angulo minoris. Neque omnino affectio reciproca eſt, ut omnes anguli æquales ſint recti: poſſunt enim obliqui inter ſe æquari, & poteſt obliquus æquari recto, ut lunularis rectilineo, ut patuit. Obliqui anguli definitio è crurum obliquitate intelligitur: unde etiam patet angulum obliquum inæqualẽ eſſe recto homogeneo: neque ulla lege obliquos angulos æquari: quia infinite obliquitas augeri minuique poteſt.



9. *Angulus obliquus eſt obtuſus aut acutus.*

Obliquitatis alia differentia fuit in linea, peripheriæ nempe & helicis, hic alia dichotomia eſt obtuſum & acutum, quæ differentia propria eſt angulis, unde alio transfertur: ut ingenium obtuſum, acutum, & ſimilia.

10. *Obtuſus eſt obliquus major recto.* II d I.

Vt hic aei. Intelligitur in definitione genus ſpeciei utriuſque: Nam rectus rectilineus eſt major recto ſphærico, neque tamen obtuſus eſt: hæc autem major inæqualitas infinite poteſt augeri.

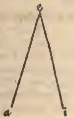


II. *Acutus*

357

11. *Acutus eſt obliquus minor recto, 12 d 1.*

Vt *aei.* Hic genus idem intelligatur; quia non omnis angulus minor quolibet recto acutus eſt: nam rectus ſemicircularis & ſphericus minor eſt recto rectilineo, neque tamen eſt acutus.

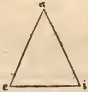


P. RAMI GEOMETRIAE LIB. IIII.

de figura.

F*Igura eſt lineatum undique terminatum.*

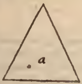
Sic triangulum *aei* eſt figura, quia eſt planum tribus lateribus undique terminatum. Sic circulus eſt figura, quia eſt planum una peripheria undique terminatum. Sic 14 d 1 figuram cum definit Euclides, quod ab aliquo, aut ab aliquibus terminis comprehenditur, lineam figurã nõ facit, cum linea duobus tantum pũctis ad extrema duo terminetur, neq; longitudo ſola expers latitudinis poteſt in latum terminari. Figura itaque lineatum tantũ eſt, ſed ſequentia figuræ generatim in ſuperficie & corpore rem totam declarabunt.





2. *Centrum eſt punctum in figura medium.*

In figuræ parte aliqua ſpectantur centrum, perimeter, radius, diameter, altitudo. Centrum igitur eſt punctum in medio figuræ: ſic in triangulo, in quadrato, in circulo cẽtrũ eſt *a, e, i.* Centrum videtur Euclides 16 d 1 & 16 d 11 rotũdæ figuræ ꝓprie attribuere, quomodo & Apollo oraculi ſui carmine definivit.





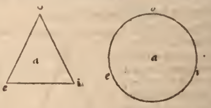


Κέντρον ἀφ' οὗ πᾶσαι μέχρις ἄντυγος ἴσαι ἐασιν.
Centrum á quo omnes uſque ad oram æquales ſunt.

Verum ne hic Apollo quidem, quamvis deliaco duplicandi cubi problemate mathematicus haberi voluerit, tamen Ariſtoteli probaretur generale ſpecialiter definiendo. Nam 3 & 4 p 15 centra quadratorum appellantur, item 4 p 15 centra triangulorum, quomodo cujuſcunque figuræ centra dicentur: & centrum gravitatis dicitur in omni magnitudine plana, ex qua ſuſpenſa eſt parallela horizonti: ut ex Archimede & Eutocio perſpicitur, vel (ut Pappus ait 8 theor. 8 lib) eſt punctum á quo ſuſpenſum pondus quieſcit dum fertur. Itaque ſi lamina aliqua partibus omnibus æque gravis eſſet, centrum idem eſſet magnitudinis & gravitatis.

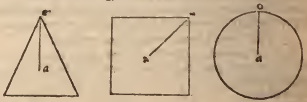
3. *Perimeter eſt comprehenſio figuræ.*

Hæc definitio eſt nominis græci. Ergo perimeter trianguli eſt una é tribus lineis compoſita linea: ut à Proclo dicitur 4 p 1. ſic trianguli *a* perimeter eſt *eio*. Sic perimeter circuli eſt peripheria, ut in *eio*. Sic perimeter cubi eſt ſuperficies é ſex planis ſuperficiebus compoſita, & perimeter ſphæræ eſt ſuperficies ſphærica integra, ut poſtea patebit.



4. *Radius eſt recta á centro ad perimetrum.*

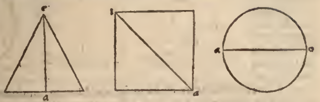
Vt in ſubjectis figuris *ae, ai, ao, dxvip* radius eſt verbum Platonis in Timæo rotundum definientis, cujus omnis extremitas paribus à medio radiis attingitur: at antea centrum pro cujus libet figuræ medio ſumptum eſt. Sic modo radius intelligatur pro qualibet diſtantia á centro ad perimetrum, ſive ſint æquales, ſive inæquales: quomodo in opticis radii dicũtur á viſibili tanquam ab aliquo centro, quoquò verſus rectis lineis agi. In geometricis elementis radii nomen nuſquam eſt, ſed periphraſis perpetua, Quæ ex centro, cum de circulo agitur.



5. Diame-

5. *Diameter eſt recta inſcripta figuræ per centrum.*

Vt in ſubjectis figuris *ae, ai, ao.* Diameter eſt recta linea in circulo ad 17 d 1: in parallelogrammo



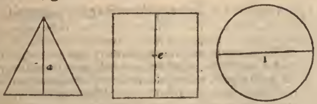
ad 34 p 1: in ſphæra ad 17 d 11: in priſmate ad 39 p 11. Diameter trianguli etiam ſimiliter eſt, & omnino cujuſcunque figuræ, quia ut antea dictum eſt, figuræ cujuſcunque centrum eſt, tametſi & centri & diametri nō proinde facilis ſit inventio. Diagonius autem dicitur, quando terminatur oppoſitis angulis, ut 28 p 11, ut in demonſtratione 39 p 11. ſed in planis & rectilineis proprie. Nam potius in ſolidis axis dicitur, ut patebit poſtea: ut vero ex infinitis per totam figuram punctis unicum centrum eſt, ſic ex inæqualibus lineis infinitis per totam figuram ea ſola diameter eſt, quæ per centrum tranſit. Itaque

1. *Diametri in eadem figura ſunt infinitæ.*

Diameter quamvis ex infinitis inæqualibus ea ſola ſit, quæ per centrum, attamen per centrum varia eſſe poteſt: in circulo res apertiſsima eſt, ut in aſtrolabio index volvi poteſt per omnia puncta peripheriæ: ſic in ſphæra & rotundis res facilior eſt, ubi diametri ſunt æquales, in reliquis tamen res eadem: quia diameter eſt recta per centrum inſcripta, utrum ad angulos an ad latera terminetur, nihil intereſt. Itaque diametros infinitas in eadem figura eſſe, eſt è diametri definitione. Et

2. *Centrum figuræ eſt in diametro.*

Vt hic vides *a, e, i.* Hoc eſt è diametri definitione.



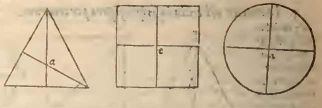
Nam quia diameter inſcribitur figuræ per centrū, ideo centrum figuræ in diametro eſſe neceſſe eſt: id præcipue aſſumit Archimedes 9.10.11.13 th.1. Iſorro. Et

3. *In concurſu diametrorum.*

Hoc item eſt ex eadem definitione diametri, ut hic. Nam cum diameter quæ-

 libet ſit.

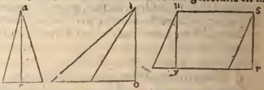
libet ſit per centrum, neceſſe eſt centrum cōmune eſſe diametris omnibus, ideoque eſſe in earum concurſu, a-



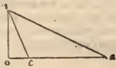
lioqui eſſent diverſa centra ejuſdem figuræ. Id vero nominatim Archimedes proponit in Iſorropicis 8 & 12 th. 1 Iſorr. de parallelogrammis & triangulis præcipiens.

6. *Altitudo eſt perpendicularis à vertice figuræ ad baſim.*

Vt in ſubjectis figuris ſunt *ae*, *io*, *uy* vel *sr*. Hæc definitio ita generalis eſt in Euclide 4 d 6, cōmunis in plano rectilineis & circulis, in ſolido pyramidibus, priſmatis, ſphæris, conis, cylindris, cōmunis denique omni figuræ: nec vero intereſt



utrum baſis eadem ſit, an longius continuata, ut in triangulo, obtuſangulo, cū baſis eſt ad obtuſum. Vt hic in triangulo *aei* eſt *ao*.



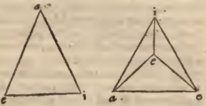
7 *Figura ordinata eſt figura æquitermina & æquiangula.*

In figuræ parte ſunt (ut patuit) centrum, perimeter, radius, diameter, altitudo. In tota autem figura affectio eſt varia è numero differentiaque terminorū: à numero differentiaque terminorum figura dici poſsit generaliter rectitermina, æquitermina, æquicrura, paralleltermina; oblonga, rhombus, rhomboides, trapezia, æquiangula, rectangula: in ſuperficiebus autem trilatera, quadrilatera, multilatera, æquilatera, rectilinea, obliquilinea, miſtilinea: in ſolidis tetraedra, pentaedra, polyedra, plana, ſphærica, conica, cylindracea: á numero differentiaque angulorum in ſuperficiebus triangula, quadrangula, multangula: in ſolidis ſimilis differentia nominari non ſolet, quamvis tamen inſit. Hæ vero differentiæ aut ſuis nominibus intelliguntur, aut ſpeciatim per ſuas ſpecies intelligētur. Tres igitur affectiones generales hic videntur definiendæ: figuræ ordinatio, primatus, & ratio. figuræ vero ordinatæ definitio nominatim non

tum non eſt in elementis Euclidis,attamen ex 25.26.27.28. 29 d 11 ſumi poteſt, ubi adhibentur ad ordinatorum corporum definitionem plana,æqualia, æqui latera & æquiangula. Sic Theon τεταγμένον σχῆμα definit primo magnæ conſtru/ ctionis: (cum de planis rectilineis loquitur) æquilaterum æquiangulum. Pap pus autem & græci alii vocant τεταγμένον ἄπταιστον ordinatum, bene ordinatum: Campanus pro eodem regulare dixit ad 17 p 13. In planis igitur triangulum æ/ quilaterum eſt ordinatum, & reliqua triangula ſunt inordinata: in quadran/ gulis quadratum eſt ordinatum, reliqua inordinata: multangulum generis cu juſque poteſt eſſe ordinatum. In obliquilineis circulus eſt ordinatus, quia æqui terminus, cum terminus pro terminis innumerabilibus unicus & ſingularis ſibi ipſi præcipue ſit æqualis, quia æquiangulus, cum (licet reipſa nullus inſit angulus) par tamen & æqualis utique ſit inclinatio & velut angulus periphe/ riæ ſibi ipſi ſemper æqualis: unde Platoni ac Plutarcho circulus dicitur polygo/ nia, & Ariſtoteli ὅλη γωνία totus angulus. In miſtilineis nihil eſt ordinatum: in ſo lidis, & pyramidibus tetraedrum eſt ordinatum, é priſmatis cubus, é polyedris tria tantum octaedrum, dodecaedrum, icoſaedrum: In obliquilineis ſphæra eſt ordinata eodem argumento quo circulus.

8. *Figura prima eſt figura in alias ſimpliciores figuras individua.*

Sic in planis prima eſt triangulum, quia in ſimpliciorem figuram dividi nō poteſt, quamvis multis modis diſſecari poſsit: ſic in ſolidis pyramis prima figura eſt, quia in ſimpliciorem corporis figuram dividi non poteſt: licet in alias innumerabiles poſsit dividi: à triangulo autem omnia plana oriuntur, ut á pyramide corpora, quales figuræ ſunt aei, aeio.



9. *Figura rationalis eſt quæ comprehenditur á baſi & altitudine rationalibus inter ſe.*

Sic Euclides 1 d 2 dicit rectangulū comprehendi á duabus rectis inter ſe, quippe multiplicatis. Geometrica enim comprehenſio eſt interdum velut in numeris multiplicatio. Itaque ſi dederis baſin & altitudinē rationales, ut earum ratio ſit explicabilis numero datæ menſuræ, tum numeris laterum multiplicatis explicabitur magnitudo figuræ. Generis hujus definitio materiam demonſtrabilis propoſitionis Euclidi præbuit, 20 p 10 de rectangulo rationali: At materiam principii præbere debuit, ut præbuit 16.17 d 7 in definiendo plano & ſolido numero. Tales enim numeri ſignificant figuras rationales explicabiles numero, & numeri multiplicati inter ſe facientes numeros illos planos, ſolidoſq; latera figurati numeri dicūtur ab Euclide in illis definitionibus: Figura itaque rationalis fit duobus rationalibus lateribus inter ſe multiplicatis: & per ſynec/

doςhen:

dochen ita figura unica dicitur rationalis, per latera nempe rationalia, tales figuræ tandem erunt in planis parallelogrammum rectangulum, in ſolidis rectis priſma & cylindrus, unde reliquarum omnium figurarum ratio & menſura capietur. Itaque

Numerus figuræ rationalis figuratus dicatur, & numeri unde fit, latera figurati.

E ſpecialibus nominibus plani, quadrati, ſolidi, cubi quibus Euclides utitur, generale figurati nomen hic factum eſt, & anologia eadem numeros factores figurati, lateratos dici conveniebat: latera tamen dicta ſunt Euclidi, neque tropum mutari neceſſe eſt. Geometria vero ſui & generis & juris magnam quidem partem eſt, neque aliter quam geometrice tractabilis: attamen parte quadam numeris aſſociatur, & iis explicatur, numerique geometricarum affectionum interpretes geometricis vocabulis appellantur (ut dixi) planus, quadratus, ſolidus, cubus á geometrico plano, quadrato, ſolido, cubo: quorum umbræ quædam tales numeri ſunt. Sic Euclides ait ſed ſpecialiter 19 & 20 p 10 rectangulum comprehenſum á rectis longitudine ſymmetris eſſe rationale: & ſi rationale ad rationalem comparatum ſit, latitudinem efficit rationalem & ſymmetram baſi: ut ſi rectangulum comprehenditur á baſi 4 & altitudine 3, erit rationale nempe 12, & rectangulum rationale ut 12 comparatum ſit ad baſim rationalem 4, facit latitudinem rationalem nempe 3: Quæ leges multiplicationi & diviſioni numerorum congruunt. Sed id generaliter de quavis figura rationali ſeu plana ſeu ſolida verũ eſt, & in ſolida baſis ſumitur pro duplici dimẽſione longitudinis & latitudinis. Itaq; Ariſtot. generaliter ait 7 c 1 Poſt. arithmeticã demonſtrationẽ magnitudinum accidentibus convenire, cum magnitudines numeri fiunt: Et Proclus ait quicquid in geometria ῥητὸν καὶ γνωστὸν explicabile & cognobile ſit, numeris explicari & cognoſci. Sed Proclus idẽ huc neſcio quomodo intuens nec ſatis animadvertens ait figuram eſſe propriam geometriæ, quod verum eſt: ſed addit figuram à geometria ad arithmeticam κατὰ ἀναλογίαν pervenire. Analogia igitur iſta mathematicos omnes & græcos & latinos decepit, ut figuratorum numerorum doctrinam arithmeticæ attribuerent, eo moti fortaſſe, quod videatur multiplicatio (quæ propria eſt arithmeticæ) omnes talium figurarum affectiones explere, ſine continuitate, ſine contactu, ſine angulo, ſine ſitu, id eſt ſine magnitudinis affectione. Verum magna differentia hic eſt. Multiplicatio enim arithmetica eſt unitatum, ut 4 per 3 facit 12 unitates: at cum lineam 4 pedum ducis angulo recto ſecundum lineam 3 pedum, facis nõ lineam 12 pedum, ſed ſuperficiem planam 12 pedum quadratorum, aliudque omnino eſt geneſis arithmetica, aliud geometrica: principiumque numeri eſt pars numeri, principium magnitudinis non eſt pars magnitudinis. Itaque rerum quidem magna hic diſsimilitudo eſt, verborum autem ſola ſimilitudo: ac licet figurarum & planarum & quadratarum item ſolidarum & cubicarũ quædam affectiones numeris explicentur, non tamen omnes explicantur. Neque enim quadratum vel cubum arithmetica duplicare poteſt, quod utrumque tamen geo-

men geo

men geometria profitetur. Neque vero geometriæ corpus ſuis membris conſtabit, ſi præcepta de planis & ſolidis numeris ad arithmeticam referantur, & abſurdum fuerit ſpecies figuræ in arithmetica præcedere, genera in geometria ſequi. Denique uſus geometricus diſceptator & judex controverſiæ hujus eſto, quem in figuratis numeris extra geometricas figuras, nullum deprehendes, & talis arithmetica quædam conſequentibus artibus ſpecialis accommodata eſt in ſonis, in aſtris: ut arithmetica hic geometrica, illic muſica, iſtic aſtronomica dici poſsit, abſolute arithmetica nequaquam, quæque extra geometriam, muſicam, aſtronomiam inutilis eſſet futura. De planis itaque & ſolidis numeris tanquam planarum & ſolidarum figurarũ adjunctis umbris in geometria ſuo loco præcipiendum fuit, & iis numeris utendum quoties magnitudines numeri fient, ut vere Ariſtoteles monuit, nec heterogenia hic erit, cum ſuperioris & altioris doctrinæ uſus in ſubalterna & inferiore doctrina adhibebitur.

·10. *Figuræ Iſoperimetræ ſunt figuræ æqualis perimetri.*

Affectiones unius figuræ adhuc fuerunt in ordinatione, primatu, ratione, ſequitur duarum figurarum comparatio in ratione, proportione, ſimilitudine. Qua ſi nihil in geometricis rebus præſtantius eſſe dixero, nihil á veritate (opinor) aberrabo. Axiomata enim ſequentia maximam in geometria partem complectuntur, primaque ſunt ſui quodque generis & antiquiſsima. Itaque poſtulanda & exemplis illuſtranda ſunt, ratio eſt in Iſoperimetris. Sic triangulum perimetri 16 pedum eſt Iſoperimetrũ triangulo 16 pedum, quadrato 16 pedum, & circulo 16 pedum: nec iſoperimetria homogeniam figurarum requirit, ſed tãtum æqualem ambitum: unde manifeſtus eſt error mathematicorum qui figuras iſoperimetras definiunt, quæ intra eundem orbem inſcriptæ ſunt, vel quarũ anguli eundem ambitum capiunt, cum æqualis & inæqualis perimetri figuræ in eũdem orbem inſcribi poſſunt, & triangulum quadratumque eidem circulo inſcripta capiunt illud tribus, hoc quatuor angulis eundem ambitum: neq; tamen ſunt iſoperimetra, & circuli ipſi inter ſe ad talem definitionem nũquam eſſent iſoperimetri. Definitio illa fuit Omniſancti in Cuſani Cardinalis matheſin interpretis, quo errore imbuti poſtea multi ψευδογραφίαν latiſsime propagarunt.

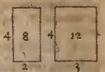
11. *Ex iſoperimetris homogeneis ordinatius eſt majus, ex heterogeneis ordinatis terminatius.*

Geometricum axioma de ratione figurarum ex iſoperimetria, Theon primo magnæ conſtructionis reperit á Zenodoro. Idem tractatũ plenius eſt á Pappo quinto libro: & á Proclo propoſitum in Timæum Platonis: & ad 4 & 27 p 1: Archimedis etiam ſcripta quædam de iſoperimetris prædicantur. Ordinatius vero in theoremate intelligatur etiam pro minus inordinato. Sic triangulum æquilaterum erit majus iſoperimetro inæquilatero, & æquicrurum vario. ſic in quadrangulis quadratum majus non quadrato. ſic oblongum ordinatius eſt majus minus ordinato oblongo. Sic ex heterogeneis ordinatis quadratũ ma-

jus triangulo, & circulus quadrato, quia quadratum eſt πολυπλευρότερον, & pluribus terminis conſtat quam triangulum, & circulus quam quadratum. Sic in ſolidis icoſaedrum majus eſt dodecaedro. Zenodorus in planis πολυγωνιώτερον ſeu πολυπλευρότερον quod in planis idem eſt: Pappus in ſolidis πολυεδρότερον majus efficit, quod in ſolidis non ſit idem quod πολυγωνιώτερον. Ratio iſoperimetrorum ea eſt, ex cujus ignoratione ψευδογραφία infiniti per omnes humanæ vitæ partes erroris orta eſt, Iſoperimetra eſſe æqualia. Hinc enim geodeſia in agrorũ dimenſionibus fraudulenta, hinc geographia in regionibus & inſulis mendax & mendoſa, cum geographi metiuntur inſulas numero dierum, quibus circũeuntur & circumnavigantur. Metire iſoperimetris menſuris altera cylindracea, altera cubica frumentum, longe inæqualem capacitatem reperies. ſed ſumma figurarum capacitas & perfectio in iſoperimetris ita ſummatim concludatur.

12. *Si figuræ primæ ſunt æqueal tæ, ſunt ut baſes: & contra.*

Ex elementis geometricarum comparationum primũ fuit in ratione iſoperimetrarum figurarum: ſecundum ſequitur in proportione primarum figurarũ, aurea vere, ſi illud primum argenteum fuerit. Proportio numerorum geometrica dicitur in arithmeticis regulis, aurea regula: Hæc vero proportio figurarũ in geometricis figuris longe ampliſsima materia laudis aurea quoq; poſsit appellari: pertinet enim non ad primas ſolum, ſed argumento proportionis ad primarum multiplices. Hoc igitur aurum quanto abundantius, tanto cupidius & avidius excipiendum. Proportio primarum figurarum hic duplex eſt, prima eſt directa in æquealtis. Hoc directum proportionis geometricæ in primis aurum ex arithmetica lege directæ proportionis derivatum eſt, non eſt tamen rationale, nec explicabile numero in primis ipſis figuris, ſed tantum in earum quibuſdam æquemultiplicibus, quæ ſuis ſimplicibus ſunt proportionales. E logico proportionis axiomate æquemajorum patuit in arithmeticis. Si numerus numeros multiplicet, facti erunt proportionales multiplicatis. Itaque æque altarũ vis explicabilis eſt in figuris rationalibus. Ut in duobus parallelogrammis rectangulis eadem altitudo 4 duas baſes 2 & 3 multiplicet: facta parallelogramma 8 & 12 ſunt proportionalia baſibus 2.3. Itaque ut 2 ad 3, ſic 8 ad 12: Idem erit poſtea in rectis priſmatis & cylindris In planis parallelogramma ſunt duplicia triangulorum: in ſolidis priſmata ſunt triplicia pyramidum, cylindri triplices conorum. Hæc (inquam) cauſſa propoſiti axiomatis ſic numero explicari poteſt in multiplis: quæ tamen antiquior in primis figuris, triangulis pyramidibus, conis eſt, quam in triangulatis, pyramidatis, conicatis, quamvis numero explicari non poſsit.



Hoc axioma prædicandæ per univerſam geometriam fœcunditatis eſt: Hinc enim propoſitiones in elemẽtis novẽdecim oriuntur 35.36.37.38.39.40.41 p 1: 1 p 6.25.29.30.31.32 p 11: 4.5.6.11.13.14 p 12, præter rotundas figuras, ut circulos & ſphæras, in quibus veritas eſt eadem, ſi diameter pro baſi intelligatur, ut 2 & 18 p 12 Euclides intelligit: item præter innumerabilia conſectaria, quæ per

univerſam

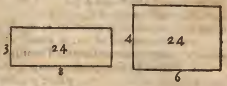
univerſam geometriam é 1 p 6 ducuntur. Hæc (inquam) aurea geometria tam copioſa ex altera primarum figurarum proportione nobis erit, unde nihil intuendo ſpatia figurarum, attamen é ſolis baſibus ratio ipſarum æqualitaſque vel inæqualitas poterit explicari. Converſio autem protinus patet, figuræ primæ ut baſes ſunt æquèaltæ, nempe cũ facti ſunt proportionales multiplicatis, numerus idem multiplicavit. *Itaque*

Si ſunt in baſi æquali, ſunt æquales.

Sic triangula, ſic parallelogramma, quæ eſt 35.36.37.38 p 1, quo poſſunt etiam referri 39 & 40 p 1. Sic cæteræ figuræ propoſitæ in æquali baſi æquantur.

13. *Si figuræ primæ ſunt reciprocæ baſi & altitudine, ſunt æquales: & contra.*

Sed jam proportionis geometricæ alterum aurum dicatur in reciprocatione, prius enim fuit in directa proportione, & hæc ex arithmeticis aurea regula eſt proportionis reciprocæ, ſed figuris primis accomodata. Euclides altitudinum & baſium proportionem reciprocationi ſubjecit, & 2 d 6 reciprocationem figuris tanquam propriam attribuit, & figuras reciprocas ait eſſe, quando in utraque figura ſunt antecedentes & conſequentes termini, id eſt quando rationum termini in utraque figura reciprocantur: ſitq; ut primus terminus primæ ad primam ſecundæ, ſic ſecundus ſecundæ ad ſecundum primæ. Verum reciprocatio res arithmetica eſt omnino, ut in arithmetica noſtra docuimus. Atque hic conſumptæ ſunt 14.15 p 6, 34 p 11, 9.15 p 12. Reciprocatio rationalis & explicabilis eſt numero non in figuris primis, ſed in æquemultiplicibus primarum: ut jam prædictum in directa proportione. ut ſunto rectãgula parallelogramma duo inæqualia baſibus & altitudinibus 3. 8. 4.6. ut hic vides. Proportio reciproca eſt ut baſis 3 ad baſin 4, ſic altitudo 6 ad altitudinem 8: & parallelogramma ipſa ſunt æqualia, nempe 24 & 24:



Sunto ſolida duo inæqualibus item baſibus & altitudinibus (quia hic etiam baſis eſt pro lõgitudine & latitudine) 12.2.3.6.3.4. ſolida ipſa erunt 72 & 72, ut hic vides, & proportio itẽ reciproca eſt baſium & altitudinũ: ut enim 24 ad 18, ſic 4 ad 3.



Et cauſa eſt ex ipſa aurea proportionis in arithmeticis lege, quia bis bina latera ſunt proportionalia, ideoque factæ ab iis areæ ſunt æquales. Et viciſſim ex eadem lege, quia areæ ſunt æquales, termini quatuor ſunt proportionales, quæ converſio eſt præſentis axiomatis.

14. *Figuræ ſimiles ſunt figuræ æquiangulæ & proportionales cruribus æqualium angulorum.*

Geometricum aurum in figuris primis tum æquealtis tum altitudine & baſi reciprocis expoſitum eſt, ſupereſt in ſimilibus omnium puriſsimum & pretioſiſsimum aurum. Primo ſimiles figuræ definiuntur, deinde comparantur. Similitudo figurarum eſt, non primarum modo & á primis multiplicium, ſed omnino omnium, & duabus rebus comprehenditur æqualitate angulorum & proportione crurum: & duæ figuræ dicuntur ſimiles tali ſynecdoche particulariũ & angulorum æqualium & crurum proportionalium, qua figura rationalis dicta eſt ratione laterum rationalium. Neque duo termini ut duæ figuræ ſimilitudinem faciunt, ut neque illic unicus terminus ut unica figura rationem facit. Verum definitio ſimilitudinis in figuris magnam geometris anxietatẽ attulit, ut in unoquoque figuræ genere nova ſimilitudinis definitio facta ſit: 21 d 7 de figuratis numeris ſimilibus: ut 1 d 6 de ſimilibus rectilineis, 10 d 3 de ſectionibus ſimilibus, 7 d 11 de ſimilibus inclinatiõibus, 9 d 11 de ſimilibus ſolidis, 24 d 11 de conis & cylindris ſimilibus: Hinc etiam novæ definitiones de ſegmentis conicis ſimilibus apud Apollonium, de ſimilibus ſphæroidibus apud Archimedem, de quibus in ſcholis. Circuli autem & ſphæræ ſimiles intelligentur ex illa polygonia infinitorum laterum, ut ſuo loco de ſingulis intelligetur.

Itaque

1. *Habent homologos terminos æqualibus angulis ſubtenſos, & æquales, ſi ipſæ ſint æquales.*

Conſectarium eſt é proxima generali definitione in rectiterminis præcipuũ & ita ſumitur á Theone ad 4.5.6 p 6 in rectilineis, ſed nos generale etiam fecimus, & homologos terminos appellamus é ſumptis proportionalibus, primũ & tertium, ſecundum & quartum, id eſt alternos: Homologia enim & ἀναλλαγὴ 11 & 12 d 5 eadem res eſt, uti in ſcholis illius loci docuimus. Pars ultima de æqualitate terminorum eſt lemma Theonis ad 22 p 6.

Et

2. *Similiter ſitæ ſunt, quando termini proportionales ſimili ſitu reſpondent.*

Euclides appellat 18.26.27.31 p 6, 27 p 11 ſimiliter ſitas figuras, vel ſimiliter deſcriptas, ut in cõſectariis 19 & 20 p 6, & 22 p 6, & 37 p 11, neque definit, ſed res tamen ea eſt in ſitu ſimili, cum nempe ſupera ſuperis, infera inferis, & reliquæ loci differentiæ congruunt: & apud Archimedem in Iſorropicis 9 axi, ſimiliter ſita puncta in planis ſimilibus definiuntur, á quibus ad æquales angulos rectæ faciunt æquales angulos cum homologis lateribus: ſitus ille ſimilis neceſſario exigitur ad 26 & 27 p 6.

Et

3. *Similes eidem ſunt, ſimiles inter ſe.*

Euclides ſpeciale id fecit de rectilineis ſimilibus 21 p 6. Patet aũt protinus ex ipſa definitione ſimilium. ſimilitudo enim duarum figurarum ad eandem concludit & æqualitatem in angulis, & laterum proportionem inter ſe.

Et

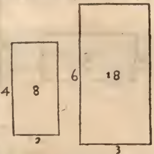
4. *Si partibus datæ figuræ partes ad datum terminum ſimiles ſimiliterque ſitæ conſtituantur, figura conſtituetur ſimilis datæ ſimiliterque ſita.*

Hæc

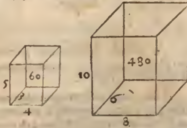
Hæc fabrica ſpecialiter proponitur ad 18 p 6, & 27 p 11.

15. *Figuræ ſimiles habent rationem homologorum laterum æquemultiplicatam dimenſionibus, & medium proportionale una minus.*

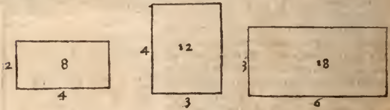
Jam aurum ſequitur illud (ut dixi) pretioſiſsimum, aurum tamen, ut in cæteris antea generalibus, ex parte tantum rationale & numerabile. figuræ vero planæ duarum ſunt dimenſionum, ſolidæ trium: Itaque habebunt illæ duplicatam rationem homologorum laterum, hæ triplicatam. Ratio in rationalibus primo manifeſtior erit. Numeri plani ſimiles ſunt in duplicata ratione homologorum laterum, eſt 18 p 8, ut 8 ad 18 ſunt plani numeri ſimiles, ſunt etiam plana iis numeris explicabilia ſimilia: ut hic vides. Nam anguli ſunt æquales & æqualiũ crura proportionalia, quia latera eorum 2 & 4, 3 & 6 ſunt proportionalia. At ratio 8 ad 18 eſt ratio 4 ad 9: quæ eſt ratio duplicata homologorum laterum, nempe 2 ad 3: ut apparet duplicata ratione 2 ad 3: ſic $\frac{2}{3}\frac{2}{3}(\frac{4}{9}$ Itaque in planis ubi dimenſio duplex eſt longitudo & latitudo, ratio duplicatur, ideoque in parallelogrammis rectangulis (quæ numeris planis reſpondent) ratio iſta eſt. In triangulis dimidiis parallelogrammorum rectangulorũ veritas eadem eſt, nec per ſe tamen rationalis & explicabilis numero: in trapeziis etiam & quibuslibet planis rectilineis ſimilibus veritas eſt eadem: ut etiam nominatim proponitur 20 p 6. ſolidi numeri ſimiles ſunt in triplicata ratione homologorũ laterum, eſt 19 p 8: ut 60 & 480 ſolidi ſimiles ſunt,

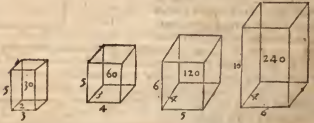


ſunt et:ã ſolida ſimilia quæ iis numeris cõprehẽduntur, ut hic vides. Quia latera ipſorum 4. 3. 5 & 8. 6. 10 ſunt proportionalia. At ratio 60 ad 480 eſt ratio 4 ad 8 triplicata: ſic $\frac{4}{8}\frac{4}{8}\frac{4}{8}(\frac{64}{512}$ id eſt 1 ad 8, ſeu octupla, quod offendes diviſis 480 per 60. Itaque in ſolidis ubi dimenſio triplex eſt, ratio triplicatur, ideoque in parallelopipedis rectangulis (quæ ſolidis numeris reſpondent) ratio iſta eſt rationalis & explicabilis numero. In pyramidibus trientibus priſmatum & ratio item eadem eſt, neque per ſe tamen rationalis vel explicabilis numero: In conis & cylindris ſimilitudo, inde ſuo loco percipietur. Quare tertium hoc geometriæ proportionis in ſimilibus figuris aurum per ſe relucet reſplendetque, ſed in ſuo generali & proprio lumine collocatum. Atque hinc apparet labor angorq; Euclidis & Theonis tot locis diſperſas ejus micas



conſectantiũ,10 d 5,5 d 19, 20,23 p 6.5,18,19 p 8, 33 p 11:2,8,12,18 p 12,de quib. in ſcholis. ſed prima pars adhuc expoſita ſit,ſecunda brevius percipitur, quod habeant medium proportionale dimenſionibus una minus. Nam inter duas ſimiles figuras planas; eſt una media proportionalis, inter duas ſolidas ſunt duę. Euclidis de planis eſt 18 & 20 p 8: de ſolidis eſt 19 & 21 p 8. Cauſſaque tãtũ eſt arithmetica ut prius. Nam ſi duplicata ratio eſt numeri ad numerum, neceſſe eſt ex continuorum lege unum intereſſe proportionalem, cujus cum primo etiam ſit illa duplicata ratio: ſi triplicata, neceſſe eſt duos intereſſe, ut hic vides.





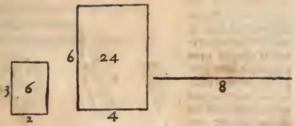
Itaque

1. Si lineæ rectæ ſint continuè proportionales una plures dimenſionibus figurarum ſimilium ad primam ſecundamque ſimiliter ſitarum, ut prima recta eſt ad ultimam, ſi. prima figura eſt ad ſecundam: & contra.

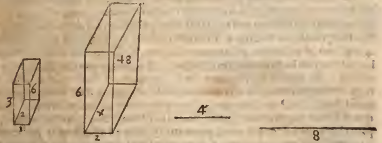
E ſimilitudine figurarum duo conſectaria oriuntur ex parte tantum, ut axioma ipſorum, rationalia & numeris explicabilia. De triangulis & triangulatis conſectaria ſunt; Euclidis ad 19 & 20 p 6. Si tres rectæ ſint continuæ proportionales, erit: ut prima ad tertiam, ſic rectilineum comparatum primæ ad rectilineum comparatum ſecundæ ſimile ſimiliterque ſitum, quod in numeris parte quadam poteſt intelligi: ut ſunto tres lineæ pedum 2. 4. 8. & ad primam ſecundamque comparentur figuræ ſimiles pedum 6 & 24: ſic nempe ut 2 & 4 ſint baſes earum: Hic ut prima linea 2 eſt ad tertiam 8, ſic prima figura 6 eſt ad ſecundam 24: ut hic vides. Sic res patet in planis de tribus continuis, & cauſ

ſa mani-

ſa manifeſta eſt è proximo axiomate & duplicatione rationis in tertio. De pyramidibus & priſmatis tale in elementis nominatim nihil eſt: de priſmatis parallelopipedis cõſectariũ eſt ad 33 p 11. Sunto rurſus



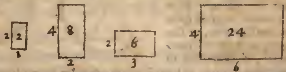
4 lineæ continuæ proportionales 1.2.4.8. & duo ſimilia ſolida comparentur ad primam & ſecundam: ad primam è lateribus 1.3.2. fit 6: ad ſecundam è lateribus 2.6.4 fit 48, ut prima linea 1 eſt ad quartum 8, ſic prima figura 6 eſt ad ſecundam 48, ut conſtat diviſione, exempla ita ſunt.



Atque in hoc conſectario via patet cujuſcunque datæ figuræ duplicandæ triplicandæ & data ratione augendæ. Nam ut prima recta erit ad ultimam, ſic figura prima erit ad ſecundam. Et

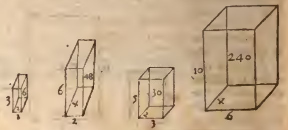
2. *Si quatuor rectæ ſint proportionales, figuræ ſimiles ad eas ſimiliter ſitæ ſunt proportionales: & contra.*

Euclidis eſt 22 p 6 de omnibus rectilineis ſimilibus, & 37 p 11 de parallelepipedis, unde generale inſtitui conſectarium poteſt, uti fecimus: proportio hic etiam ex parte poteſt explicari, neque tamen continua proportio hic exigitur, ut antea. Eſto in planis primũ exemplum. Cauſſa vero eſt proportionalium figurarũ, quod bis binæ fi-



guræ bis

guræ habent eandem rationẽ duplicatam. Secundum exemplum eſto. Neq; tamẽ hic figuræ ſunt proportionales rectis, ut antea æqualtę baſibus, ſedipſę inter ipſas, neque eodem genere proportionis ſunt proportionales, & cauſſa hic eadem, quæ prius, quia bis binæ figuræ habent eandem rationem triplicatam.

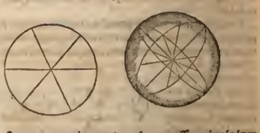


16. *Figuræ complentes locum ſunt, quæ circa idem punctum quolibet modo collocatæ nihil inane relinquunt.*

Hæc definitio veterum geometrarum fuit, ut apparet è Simplicio ad 8 cap 3 lib. de cælo: quales figuras Ariſtoteles ibidem cenſet tantum ordinatas eſſe, neque omnes: ſed tantum tres in planis triangulum, quadratum, ſexangulum: in ſolidis pyramidem & cubum. Verum ſi repletio loci judicetur ex angulis rectis 4 in plano, 8 in ſolido, oblongum in plano, & octaedrum in ſolido cõplebit locum (ut ſuis locis intelligetur) neque ſatis accurata erit iſta Ariſtotelis geometria. At anguli recti faciunt hoc judicium: & ſic Euclides ſolida ordinata quinque duntaxat eſſe demonſtrat ex angulis, & ita Potamon geometra apud Simplicium quæſtionem de figuris cõplentibus locum demonſtrat: Deni que ſi figuræ conjunctis angulis efficiant in plano rectos 4, vel in ſolido 8, complent locũ. De hoc problemate geometria ſcripta eſt ab antiquis geometris, & è recentibus Regiomontanus dicitur accurate commẽtatus eſſe, & Maurolycus librum pollicetur, quorum nihil dum videre nobis contigit.

17. *Figura rotunda eſt, cujus radii omnes æquantur.*

Talis erit in planis circulus, in ſolidis ſphæra. Hæc vero figura eſt ex iſoperimetris maxima, ut patuit 12 e. eaque de cauſſa Plato dixit in Timæo hoc σχῆμα τελειότατον πάντων perfectiſsimũ omnium eſſe: ideoque deus (ait idem) mundũ ſphæricum figuravit, ut ſuo complexu cuncta contineret, & Ariſtoteles in mechanicis, prob. ait hanc figuram omnium miraculorum eſſe principium & cauſſam.



cauſſam. Sed ea miracula ſuo tempore narrabuntur. Rotundum pro figura rotunda dicatur. Itaque

1. Diametri in rotundo biſecantur radiis æqualibus.

Quia nempe dimidia ſunt radii. Et

2. Rotunda diametrorum æqualium ſunt æqualia. é 1 d 3.

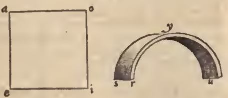
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. V. de lineis & angulis in plano.

Lineatum eſt ſuperficies aut corpus.

Lineati partitio manifeſtam intelligentiam habet é lineati definitione, qua excluditur linea, & comprehenditur ſuperficies & corpus. Atque hinc orta eſt metricæ artis partitio in geometriã de ſuperficie, & ſtereometriam de corpore, quomodo Plato 7 de rep. & Ariſtoteles 7 c 1 Poſt. geometriam & ſtereometriam diſtinguunt, attamen etiam geometriæ nomen ad totam metiendi artem ſignificandum uſurpatur.

2. *Superficies eſt lineatum duntaxat latum. 5 d 1.*

Ut hic *aeio* & *uysr.* ſuperficiei definitio complectitur intervallum lineæ, longitudinem nempe, ſed addit intervallum alterum, id eſt latitudinem. Itaque ſuperficies definitur à quibuſdam (ut Proclus ait) magnitudo duorum intervallorum. At duo intervalla non tam ſpecialiter tamque proprie definiunt: ergo ſuperficies magnitudo longa tãtum & lata melius definietur.



Tales (inquit Apollonius) ſunt ſuper terram umbræ, quæ longe & late campos occupant: terram vero non ingrediuntur, nec craſsitudinis quidquam habent. ἐπιφάνεια nomen hic ſignificantius eſt græce, tanquam diceretur apparentia, quia magnitudinis nihil viſibile ſit niſi ſuperficies.

3. *Superficiei terminus eſt linea. 6 d 1.*

Res manifeſta eſt in planis: ſuperficies enim trilatera terminatur tribus line-

e is, qua

is, quadrilatera quatuor, multilatera multis: circulus una: ſphærica ſuperficies integra, non videtur terminari linea: At ſi ſpectetur ſphærica geneſis in converſione ſemiperipheriæ, principium erit linea, item finis, nempe ſemiperipheria: & ſicuti punctum non ſolum terminat actu lineam, ſed potentia medium eſt, ſic & linea ſuperficiem terminat actu, & lineæ innumerabiles per totam ſuperficiem accipi poſſunt. Superficies igitur creatur motu lineæ, ut linea motu puncti.

4. *Superficies eſt plana vel gibba.*

Differentia ſuperficiei reſpondet differētiæ lineæ in rectitudine & obliquitate.

5. *Superficies plana eſt ſuperficies, quæ æqualiter intra ſuos terminos interjacet. é 7 d 1.*

Ut vides in *a e i o*. Quod igitur linea recta in duas partes oppoſitas ſpectabat, ſuperficies plana ſpectat in omnes uſquequaque partes, ut ſuperficies plana ſit omnium ſuperficierum intra eoſdem terminos breviſsima, & ejus media extremis officiant: denique æquatur intervallo intra duas lineas: poteſt etiam per unicam rectam explorari quoquó verſus applicatam, ut Proclus hic innuit. Planum vero pro ſuperficie plana uſurpatur, ut antea rotundum pro figura rotunda, & geometria de planis ſtereometriæ ſolidorum oppoſita, & ſic Proclus lib 1 cap 13 geometriam de planis à ſtereometria de ſolidis ſeparat. Euclides vero quamvis definiendo ſuperficiem faciat genus plani 5 & 7 d 1: attamen totis elementis nullam aliam ſuperficiem inſtruxit, quam planam, & tres poſtremos libros στοιχειώσεως inſcripſit ſtereometriam ſolidorum, neque ipſa Platonis & Ariſtotelis ſententiam ſequitur. Ideoque ut idem ait ad 7 d 1, Euclides ſolam ſuperficiem planam de ſpeciebus ſuperficiei definivit, in eaque tanquam in aliquo ſubjecto abaco contemplatur figuras planas & earum affectiones, ſectiones, contactus, ſitus, angulorum cōſtitutiones. Talis nimirum planicies antiquis geometris abacus ille fuit hyalini pulveris (quem & Tullius eruditum vocat) reſperſione coloratus: de quo Perſii carmen:



Nec qui abaco numeros & ſecto in pulvere metas
Scit riſiſſe vafer.——

Atque hic Proclus phantaſiam efficit, veluti planum quoddam ſpeculum, in quod à cogitationibus rationum imagines influant. De ſuperficie tamen gibba nonnihil ſuo loco præcipietur. *Itaque licet in plano*

1. *A' puncto ad punctum rectam ducere. 1 & 2 poſt 1.*

Tria deinceps poſtulantur, primum de linea recta. Linea recta & peripheria 2 lib: definitæ ſunt, ſed utriuſq; fabrica in plano hic proprie dicitur. fabrica lineæ rectæ eſt 1 Poſt. & juſtum duntaxat in plano: neque enim licet in ſphærico intra duo pun-

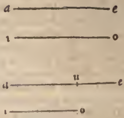
duo puncta rectam ducere, neque licet intra duo quælibet in conico & cylindraceo, á vertice enim ad baſim tantum licet: & tum plani ſecantis conum & cylindrum terminus eſt. Ergo (ut dixi) de plana recta id tantum poſtulari juſte poſsit, ut á puncto quolibet ad punctum quodlibet recta ducatur, ut hic ab *a* in *e*. Ducendæ vero rectæ in plano geometricum inſtrumentũ dicitur Amuſsis, Ptolemæo 2 cap. 1 muſicæ regula, qualę hic vides: á puncto autem ad punctum juſte poſtulatur, non ad puncta: neque enim puncta omnia in rectam cadunt, ſed in obliquam pleraque. Et in ſphæra, cono, cylindro, regula intra duo pũcta poſsit eſſe, ſed ſphęrica, conica, cylindracea. Quin exemplo rectæ poſtulat Vitellio 2 p 1 intra duas lineas ſuperficiem extendi: & ſic videatur in elemẽtis de figuris pleriſq; planis ſolidiſq; poſtulari: ut figura deſcribatur ad 7 & 8 p 2: item figura cõpleatur ad 8. 14. 16. 23. 28 p 6, quæ ſunt de planis, itẽ ad 25. 31. 33. 34 36. 40 p 11, quę ſunt de ſolidis: ſed tamẽ ſuperficies plana, & corpus planũ rectitudinẽ ſuã metiũtur linea recta, ut jus poſtulãdi in linea recta plana pri marũ videatur. Cõtinuatio aũt rectę lineę nihil aliud poſtulat, quã prolõgationẽ jã ductæ rectæ, & quidẽ á pũcto ad pũctũ, ut rectã *ae* licet continuare in *i*. Quare primum & ſecundum poſtulatum Euclidis in unum conveniunt.





Et

2. Rectã ponere ad datum punctũ æqualem datæ, & á majore ſecare æqualem minori. 2. 3 p 1.

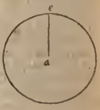


Ut data ſit *ae*, & ad punctum *i* ponatur æqualis *io*: item ſit *ae* maior quã *io*, & ſecetur congruente regula æquãte minorem *au*, ut hic. Nam ſi quis mente tantum id fieri putet oportere, is etiam regulam mente complectatur, ut regulæ opera faciat, neque vero fabrica æquandæ & æqualis amputandæ lineæ difficilior eſt, quam dato puncto & intervallo peripheriæ deſcribendæ, quam datis triangulo, parallelogrammo, ſemicirculo deſcribendi conum, cylindrum, ſphæram, quæ tamen omnia Euclides in principiis habuit. *Itaque*

Recta una duæque interſectæ ſunt in eodem plano. é 1 & 2 p 11.

Recta una poteſt eſſe communis ſectio duorum planorum, tota tamen in plano eodem eſt una & tota in eodem altero: Atque ita tota eſt in eodem. Duæ rectæ interſectæ poſſunt eſſe in duobus planis interſectis, ſed planum per eas duci poteſt. Itaque ambæ erunt in eodem plano: & planum hoc geometricé concipiendum, quod lineæ obliquæ uni, vel duabus interſectis non ſemper idem ſubjicitur, cum peripheria ſit in ſphærico, nec omnes interſectæ peripheriæ in uno plano eſſe poſſunt. Et

3 *Data recta peripheriam deſcribere.*



Hæc fabrica eſt é 3 Poſt. Dato centro & intervallo circulum deſcribere. Sed hic terminus circuli tantum quæritur, qui é definitione peripheriæ melius ducitur & in plano duntaxat iſta rectæ converſio fieri poteſt, non in ſphærico, non in conico, non in cylindraceo, niſi á vertice ubi peripheria tamen eſſe poteſt. Itaq; antea generalis fabrica fuit peripheriæ, hic autem tantum planę, ut hic. Ut vero regula fuit inſtrumentum ducendæ rectæ, ſic modo eſt circinus peripheriæ deſcribẽdæ, cruribus rectis an valgis nihil intereſt, ut hic vides. Circinus vero é geometricis inſtrumentis inſtrumentum longe præſtantiſsimum eſt, cujuſque machinatione nobiles geometræ prodiderunt omnia geometriæ problemata confici poſſe: & extat Ioan Baptiſtæ liber, quod una circini apertura omnia Euclidis problemata reſoluantur: & Cardanus mathematicus



inſignis

inſignis lib. 15 ſubtilitatum ſcribit á ſe & á Ferrario inventam circini opera omnium ab Euclide demonſtratorum demonſtrationem. Talus Dædali ex ſorore nepos hoc inſtrumentum inveniſſe dicitur 8 Metamorph.

—Et ex uno duo ferrea brachia nodo
Iunxit, ut æquali ſpatio diſtantibus ipſis
Altera pars ſtaret, pars altera duceret orbem. Itaque

Radii ejuſdem vel æquales peripheriæ ſunt æquales.

Quia eadem recta eſt ubique converſa. Atqui hic radius peripheriæ pro radio figuræ peripheria comprehenſæ intelligatur.

6. *Si duæ æquales peripheriæ á terminis æqualium crurum dati anguli rectilinei ante concurrant, recta á concurſu ad verticem biſecabit angulum.* 9 p 1.

Adhuc de lineis planis, ſequitur ipſarum affectio, primum in anguli biſectione. Eſto igitur datus angulus rectilineis æqualiũ crurũ *ae*, *ai*, & duæ peripheriæ æquales ab *e* & *i* terminis crurum ante angulum concurrant in *o*, rectaque ducatur ab *o* in *a*, dico datum angulum biſecari: ductis enim rectis *oe*, *oi*, anguli *oae* & *oai* æquicruri ex theſi & ex communi latere æquantur baſi, *eo* & *io*, per c 3 Poſt. quia ſunt radii æqualium peripheriarum. Itaque per 1 c 6 e 3 anguli *oae* & *oai* æquantur, & ideo angulus totus eſt biſectus.



7. *Si duæ peripheriæ æquales á terminis datæ rectæ utrinque concurrant, recta per concurſus biſecabit datam.* 10 p 1.

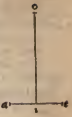
Eſto data *ae*, & peripheriæ æquales á terminis *a* & *e* concurrant in i & *o*, & ducatur recta i*o*, dico á ducta biſecari datam *ae*, quia ductis radiis æqualium peripheriarum i*a* & *ie* biſecat per præcedẽtem angulum *aie*. Itaque *aiu* & *uie* æquales & æquicruri, cum crura ſint æqualium peripheriarum æquantur baſi, *au*, & *ue*, per 1 c 6 e 3. Quare cum partes *au* & *ue* ſint æquales, data *ae* eſt biſecta.

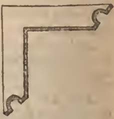


8. *Si recta in rectam perpendicularis inſiſtit, facit angulos deinceps rectos: & contra.*

Inſiſtit recta in rectam quæ ſecat nec ſecatur: & anguli ſunt deinceps quos inſiſtens efficit cum ſubjecta, ut patet é Proclo ad 15 p 1. ut hic *ae* interſecta, & *i*

inſiſtens ſunto perpendiculares, anguli deinceps *aio* & *eio* recti erunt per 7 e 3. Perpendiculum vero commune eſt omnium linearum. Attamen præcipue in planis rectis animadvertitur, & hic idcirco attentius conſideretur. Hinc enim poſtea é communi definitione deprehenditur in cæteris magnitudinibus: ſic recta judicatur perpẽdicularis peripheriæ, quãdo eſt perpẽdicularis rectæ per cõmunẽ ſectionẽ trãſeunti: ſic duæ peripheriç judicãtur interſe, perpẽdiculares: ſic poſtea linea recta perpẽdicularis plano, & planũ plano perpẽdiculare dicet, 3.4 d 11, & à Vitelliõe ad 5 d 1: ſic rectarũ linearũ perpẽdiculo corpora ipſa inter ſe perpẽdicularia judicãtur. Quod Tullius in epiſtola ad frat. 3 lib. diſerte ſignificavit. Columnas (ait) neq; rectas, neq; é regione Diphilus collocarat, eas ſcilicet demolietur, & aliquando perpendiculo & regula diſcet uti. Hic orator columnas rectas pro perpendicularibus plano horizontis, & é regione pro parallelis intelligit, & rectitudinem columnarum perpendiculo lineæ rectæ expendit. Atqui perpendiculi per totam geometriam utilitas immenſa erit in rectangulis & planis & ſolidis. Regula primum fuit inſtrumentum geometræ in dirigendis lineis, circinus ſecundum in deſcrbenda peripheria. Norma vero eſt tertium inſtrumẽtũ in linea recta recte erigenda in eodem plano ſuper rectam, atque inde ſuperficiem & corpus ſuper ſuperficiem corpuſve. Norma igitur ſic eſt. Perpendiculum vero é plumbo & filo architectis phyſicum eſt, quia gravia ſuo pondere rectis lineis ad perpendiculum ferantur, quod á Theone primo magnæ cõſtructionis demonſtratur. Inſtrumentum duplex ita eſt. Primum ad explorandum perpendiculum ſublime, ut utrum columna vel ſtructura quævis recta ſit ad planum orizontis, necquoquam acclinet. Secundum eſt ad expuezojdum planiciem planoorizontis parallelam. Itaque cum filum ab angulo recto in medium baſis inciderit, indicabit libratam longitudinem. Galli nivellum, Itali livellum, item achipendulum, Latini libram vel libellam dicunt.







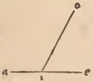


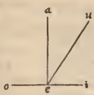
Itaque

1. Si recta

1. *Si recta inſiſtit in rectam, æquat deinceps angulos duobus rectis: & contra. e 13 & 14 p 1.*

Nam duo tales anguli cum duobus rectis eundem locum occupant: ſi inſiſtens ſit perpendicularis, faciet rectos: ſi obliqua obliquos, ut hic *aio* & *eio* eundem cũ duobus rectis locum occupant. Converſio per impoſsibile cogitur, quia pars æquaretur toti. Eſto igitur inſiſtens *ae*, quæ æquet duos deinceps angulos *aeo* & *aei* duobus rectis: dico *oe* & *ei* unam eſſe rectam. Secus cõtinuet̃ *oe* in *u* per 1 c 5 e. Iã per 1 c 8 e, *aeo* & *aeu* æquãtur duobus rectis, quibus item æquantur *oea* & *aei* ex theſi: tollatur communis *oea*, relinquetur *aeu* æqualis *aei*, pars toti. Hinc conſtat duas rectas *oe* & *ei* unam eſſe & continuam rectam.



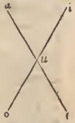


Et

2. *Si duæ rectæ interſecantur, æquant angulos ad verticem, & omnes quatuor rectis. 15 p 1.*

Anguli ad verticem ſeu verticales dicuntur, qui in eodem puncto vertices oppoſitos habent. Demonſtratio autem eſt: quia interſectæ vel ſunt perpendiculares, & recti æquantur, ut hic: vel ſunt obliquæ, tũque verticales etiam æquantur, ut *aui* & *oue*: item *auo* & *iue*, æquales vero ſunt *aui* & *oue*, quia per 1 c 8 e cum cõmuni *auo* æquantur duobus rectis: ideoque etiam inter ſe. Quare detracto illo communi relinquuntur æquales. Addit huc Proclus Euclidis corollarium à Theone prætermiſſum, angulos duarum interſectarum æquari quatuor rectis, ex eoq; corollario ait inventum eſſe admirabile à Pythagoreis theorema, ordinatis figuris cõpleri locũ planũ triangulo, quadrãgulo, ſexangulo: ſolidum tetraedro, & hexaedro: de qua Ariſtotelis geometria prædictum eſt. Sed de ſingulis ſuo loco dicetur ſubtilius. Potuit etiam Proclus huc addere. Quotlibet in communi puncto interſectarum angulos æquari quatuor rectis, quia cum quatuor rectis eundem locum occupant.





Et

3. *Si rectis*

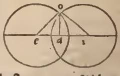
3. *Si rectis recta ſectis interiores eadem parte anguli ſunt majores duobus rectis, oppoſiti minores ſunt.*

Ut hic, ſi *a u y*, *u y i* ſint majores duobus rectis, *e u y*, *u y o*, erunt minores.



9. *Si á dato datæ rectæ infinitæ puncto duæ partes utrinque ſecentur æquales, & á punctis ſectionum duæ æquales peripheriæ concurrant, recta á dato puncto in concurſum erit perpendicularis ſuper datam.* 11 p 1.

Vt eſto punctum *a* datæ rectæ infinitæ, & ab eo utrinque ſecentur per 2 c 5 e *a e* & *a i*, tum duæ peripheriæ æquales á punctis *e* & *i* concurrant, ut in *o*, recta á dato puncto *a* in concurſum *o* erit perpendicularis ſuper datam, quia ductis rectis *o e* & *o i* anguli *e a o* & *i a o* utrinque æquicruri per fabricam é ſegmentis utrinque æqualibus & communi latere æquantur baſi, per 3 c 5 e: & ideo æquantur per 1 c 6 e 3. Itaque *a o* cum æqualiter interjaceat, per 10 e 2 eſt perpendicularis.



10. *Si pars datæ rectæ infinitæ ſecetur á peripheria á dato extra puncto, recta á dicto puncto biſecans dictam partem erit perpendicularis ſuper datam.* 12 p 1

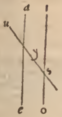
Datæ rectæ infinitæ pars *a e* ſecetur à peripheria externi centri *i*, & recta *i o* biſecet dictam partem, dico *i o* eſſe perpendicularem: interjacet enim æqualibus angulis *a o i* & *e o i* eadem de cauſſa, qua demonſtratur perpendiculum ſuperius. Atque hæc de perpendiculo rectarum planarum: ſequitur de paralleliſmo.



11. *Si duæ*

11. *Si duæ rectæ in eodem plano nuſquam concurrunt, ſunt parallelæ. é 35 d 1.*

Id Euclides juſte poſtulavit. Tũ enim perpetuo æquidiſtabunt. Ut hic *ae*, *io*.



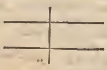
Itaque

Si recta infinita ſecat alteram é rectis parallelis infinitis, ſecabit reliquam.

Ut in eodem exemplo *uy* ſecans *ae* ſecabit etiam *io*: ſecus ſi non ſecaret, eſſet ad eam parallela, per 11 e. Ideoque & ad primam per c 11 e 2. Idque contra theſin: Proclus ad 29 p 1 deducit hoc conſectarium ex Ariſtotele 1 lib. de cælo.

12. *Si rectæ rectâ ſectæ ſunt parallelæ, æquant angulos interiores eadem parte duobus rectis, & inter ſe alternos, & exteriorem interiori oppoſito: & contra. 29.28.27 p 1.*

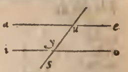
Paralleliſmus rectarum recta ſectarum triplicem angulorum æqualitatem concludit, & ab earum qualibet viciſsim concluditur. Primi anguli ſuis verbis ſatis explicantur: alterni autem verbum hic eſt ſitus (ait Proclus) quod in arithmeticis eſt proportionis, cum antecedens antecedenti comparatur, metaphora tamen reſpondet. Ut enim acutus eſt ad ſuum deinceps obtuſum: ſic in altera parte acutus eſt ad ſuum deinceps obtuſum. Itaque alterne ut acutus ad acutum, ſic obtuſus ad obtuſum. Exterior autem interiorque oppoſiti ſunt, quorum alter eſt extra parallelas, alter intus eadem parte non deinceps, ſed ſuper eandem rectam tertius ab exteriore. Proprietatis hujus triplicis cauſſa eſt é perpendiculo, quod incidens in parallelas omnem hanc varietatem oſtendit: Ut hic recti ſunt interiores eadē parte: item alterni, item exterior & interior, ideoque



æquantur & interiores duobus rectis, & alterni inter ſe, & exterior interiori oppoſito. Quod ſi ſecans obliqua ſit, parallelis idē ex cōtrario accidet. Obliquatione enim iſta, manētib. rectis & immutatis, pariter tum interiorū alter *euy* obtūditur, alter *uyo* acuitur: tū alterni acuūtur & obtundūtur: tū exterior interiorque oppoſiti pariter obtūduntur & acuuntur. ſi quis tamen interiores inæquales duobus rectis dicat, eodem argumento utraque parte & majores duobus rectis & minores dixerit (ait apud Proclum Ptolemæus) ut in rectis parallelis

f *ae* & *io*

a e & *i o* ſectis, recta *u y*, ſi dicas *a u y* & *i y u* majores duobus rectis, anguli deinceps per 3 c 8 e erunt minores, qui tamen iidem codẽ contradicentis propoſito etiam majores eſſent. Idem erit impoſsibile, ſi minores duobus rectis dicantur. Secunda pars & tertia è prima concludi poſſunt. ſecũda ſic. Bis bini anguli æquantur duobus rectis *o y u* & *e u y* per ſuperiorem partem: item *a u y* & *e u y* per 1 c 8 e. Itaque æquantur inter ſe: tollatur communis angulus *e u y* ab æqualibus, reliqui alterni ad *a* & *y* æquales relinquentur. Tertia ſic. Anguli *e u y* & *o y s* æquantur eidem *u y i* per ſecũdam proprietatem & per 2 c 8 e. Itaque æquantur inter ſe.



Converſæ prima pars hic item clarior eſt ex illa communis perpendiculi luce: Ac ſi cui interioribus angulis æquantibus duos rectos rectæ tamen concurrere videantur, ut ſi ipſi æquales ſint recti, ut hic, neceſſe eſſet duas rectas communi perpendiculo diviſas altera parte acclinare, altera declinare, vel ſaltem alteram, contra 10 e 2. Si obliqui ſint, ut hic, lineis inter ſe obliquatis anguli minuentur altera parte, altera augebuntur. Itaque æquales duobus rectis non eſſent, contra theſim. Hinc ſecunda pars & tertia concludi poſſunt. ſecũda ſic. Anguli alterni ad





y & *u* æquantur dictis interioribus per 1 c 8 e, quia utrique æquantur duobus rectis: Atque ita per primam partem ſecunda concluditur. Tertia ſimiliter per ſecundam, quia exterior *o y s* æquatur oppoſito ad verticem per 2 c 8 e. Itaque cũ exterior & interior oppoſiti æquentur, alterni quoque æquantur. Quare ut parallelismus triplicem angulorum æqualitatem, ſic triplex angulorum æqualitas parallelismum coarguit. Itaque

1. *Si rectæ recta connexæ faciunt interiores angulos eadem parte minores duobus rectis, codẽ continuatæ concurrent.*

Ut *a e* & *i o*. Aſſumptio & cõplexio eſt ad 12 e de rectis in eodem plano. Si rectæ recta ſectæ ſunt parallelæ, faciunt angulos interiores, eadem parte æquales duobus rectis. Ergo ſi non faciunt æquales, ſed minores, non erunt parallelæ, ſed concurrent. De hoc conſectario erit in ſcholis, ut Euclidem, Ptolemæum, Geminum exercuerit. Et



2. Rectæ

2. *Recta connectens rectas parallelas eſt in earum plano. 7 p 11.*

Vt hic *uy* connectens parallelas *ae* & *io*. Poſtulatur ab Euclide 35 d 1,

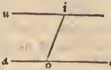


quod parallelæ ſunt in eodem plano: & quod eas connectens ſit in ipſarum plano, patet per 2 c 5 e.

Et

3. *Si recta à dato puncto cum data faciat angulum, anguli facto æquati & alterni crus alterũ erit parallelum datæ rectæ. 31 p 1.*

Ut data ſit *ae* & punctum *i* à quo recta ſit *io* faciens cum data angulum *ioe*, cui ad *i* æquetur alternus *oiu*, recta (quæ eſt crus alterum) eſt parallela datæ. poteſt vero æ-



quari angulus per primam proprietatem, & ſic vulgo architecti erecto perpendiculo æquant: poteſt item per exteriorem ſimillime.

Et

4. *Anguli crurum alterné parallelarum ſunt æquales.*

Conſectariũ eſt é tertia proprietate: unde Euclides fecit 10 p 11, ut hic vides altero interioris crure continuato.

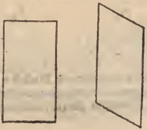


Et

5. *Si parallelæ conterminent parallelas, oppoſitæ æquantur. é 34 p 1.*

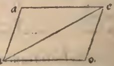
Alioqui parallelæ non eſſent. Quod é perpendiculis connectentibus intelligitur, quæ ex definitione ſunt æqualia inter parallelas, & ſi é perpendicularibus fiant obliquæ, manebunt æquales mutatis angulis.

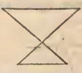
Et



6. Si rectæ conterminent eadem parte æquales & parallelas, ſunt æquales & parallelæ. 33 p 1.

Potuit vero elementum concludi è proximo, addici tamen etiam poteſt ex antecedẽtibus: ut *a e* & *i o* æquales parallelæ cõterminẽtur, ab *a i* & *e o*, & ducatur *e i*. Hic quia recta *e i* incidit in parallelas *a e* & *i o*, anguli alterni *a e i* & *e i o* æquãtur per 12 e, & æquant crurib. *a e* & *i o* per theſin & *e i* cõmuni. Itaq; per 1 c 6 e 3 æquãtur baſi *a i* & *e o*. Hoc primum eſt. Tum per 12 e, anguli alterni *e i a* & *i e o* æquãtur inter ſe, eoſque faciunt rectæ *a i* & *e o* ſectæ per rectã *e i*: ſunt igitur parallelæ, quod erat ſecundum. Eadem vero parte dictum eſt, ne oppoſitis terminis, connexas rectas quiſpiam intelligeret, ut hic.

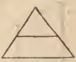




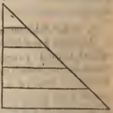
13. *Si lineæ rectæ parallelis pluribus rectis interſecantur, interſegmenta ſunt proportionalia. é 2 p 6 & 17 p 11.*

Adhuc de perpendiculo & parallelíſmo planarum, rectarum proportio poſtrema eſt, cujus elementum veritatis ſuæ cauſſam oſtendit ex ipſo parallelíſmo, idque per omnes rationis ſpecies æqualitatis & inæqualitatis majoris minoriſque. Nam ſi interſectæ ſunt perpendiculares, ſegmẽta intra duas parallelas æquantur: Communia enim perpendicula parallelíſmum faciunt, ut antea jam patuit: ut hic. Quod ſi interſectæ annuant, non jam ſegmenta quidem illa bina æqualia ſunt, ſunt tamen proportionalia: quantoque major interſecta fuerit, tãto majora erũt ipſius interſegmenta, quanto minor tanto minora. tertia autem parallela in vertice nõ expreſſa tamẽ intelligatur.





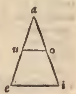


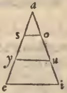


Hæc per ſpecies inductio rationum eſt Euclidi 2 33 p 6 demonſtratio, ut in ſcholis dicetur. Eſt autem elementum hoc magnæ fœcunditatis: hinc enim eſt primum ſectio lineæ ſecundum datam rationem, & inventio tertiæ & quartæ proportionalis.

1. *Si recta cum data faciens angulum ſecetur data ratione, parallelæ á ſegmentorum terminis in finem datæ & contingens in ea punctum ſecabunt datam data ratione.*

Conſectarium eſt valde generale ad omnem datæ rectæ ſectionem ſive bifariam ſive trifariam, ſive quotlibetfariam, ſive omnino ratione quamcunque dederis, ſecanda ſit. Euclides ex hac materia fecit 9 & 10 p 6. Secãda ſit primo data recta *ae* bifariam, rectaque cum data faciens angulum ſit *ai* infinita, ſeceturque *ao*, & deinceps per 2 c 5 e æqualis aſſumatur *oi*, & ducantur per 3 c 12 e parallelæ à punctis i & *o* in e finẽ datę, & *u* contingens in ea punctum. Tertia autem parallela per verticem *a* intelligitur, neque ex primi neceſſe eſt. Itaque *ae* per 13 e biſecatur, & ut *ao* ad *o i*, ſic *au* ad *ue*. ſed *ao* ad *oi* ſunt dimidiæ partes. Itaque & *au*, *ue* ſunt etiam dimidiæ. Atque hic etiam 7 e comprehenditur non argumenti quidem ſed effectus genere. At argumentum illud quidem brevius eſt, hoc autem eſt generalius. Iam ſecetur *ai* in tres partes, quarum prima ſit dimidia ſecundæ, ſecundaque tertiæ: & contermina datæ ſecetur una parte *ao*, tum ea duplicetur in *ou*, denique *ui* aſſumatur dupla ipſius *ou*, totumque diagramma tribus parallelis compleatur *ie*, *uy*, *os*, quarta parallela ad verticem, ut dictum eſt, intelligetur. Itaque ſectio erit in data, quæ facta eſt in contermina per 13 e, quia ſunt inter parallelas interſegmenta. Et





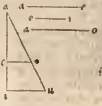
2. *Si duæ datæ rectæ facientes angulum continuentur, prima æqualiter ſecundæ, ſecunda infinite, parallelæ á terminis primæ continuationis in principium ſecundæ, & contingens in ea punctum interſecabunt tertiam proportionalem.* 11 p 6.

Sunto datæ rectæ facientes angulum *ae* & *ai*, & prima *ae* continuetur æqualiter ipſi *ai*, & ipſa *ai* continuetur infinite, tum parallelæ *ei* & *ou* à terminis primæ continuationis in *i* principium ſecundæ, & *u* contingens punctum in ſecunda, ſecant *iu* tertiam proportionalem. Nam per 13 e ut *ae* ad *eo* id eſt per fabricam ad *ai*, ſic *ai* ad *iu*. Et



3. *Si é datis tribus rectis prima tertiaque ſacientes angulum continuentur, prima æqualiter ſecundæ, tertia infinite, parallelæ á terminis primæ continuationis in principium ſecundæ & contingens in ea punctum interſecabunt quartam proportionalem. 12 p 6.*

Sunto datæ prima a e ſecunda e i tertia a o, totumque diagramma cõpleatur ex præſcripto. Hic per 13 e, ut a e eſt ad e i, ſic a o ad o u.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. VI.
de triangulo.

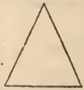
Plana ſimilia habent duplicatam rationem homologorum laterum, & unum proportionale medium. é 20 p 6, 11 & 18 p 8.

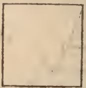
Adhuc de lineis planis earumque affectionibus actum eſt: ſequitur de figuris planis earumque generibus. Præponitur autem commune conſectarium é 15 e 4, quia dimenſio duplex eſt in planis.

2. *Planum eſt rectilineum aut obliquilineum*

Rectitudinis vero & obliquitatis differentia lineæ fuit 4 e 2: unde nunc repetitur dichotomia plani é terminis rectis vel obliquis, & eadem cauſſa præponitur modo rectilineum, qua prius recta linea præpoſita eſt obliquæ.

3. *Rectilineum eſt planum, quod comprehenditur á lineis rectis.*







Hinc eſt 9 & 20 d 1, quod angulus planus rectilineus ſit, qui comprehenditur á rectis lineis, quod figura rectilinea ſit, quæ comprehenditur á lineis rectis, ſed generale melius erit generaliter, ut in exemplis.

4. *Rectilineum æquat angulos rectis interiores quidem generatim á binario paribus, externos autem quaternis.*

Primum

Primum nempe genus rectilinei, id eſt triangulum æquat interiores duobus rectis, id eſt binario, primo pari rectorum: ſecundum id eſt quadrangulum ſecundo pari id eſt quaternario, tertium quinquangulum tertio, id eſt ſenario rectorum, & quartum quarto, quintum quinto, & ſic deinceps rectilinei genera paribus rectorũ ita reſpondẽt: ut vides in hac arithmetica progreſsione pariũ
2.4.6.8.10.12
3.4.5.6.7.8

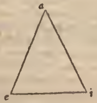


Externi tamen quolibet latere cõtinuato, rectorum quaternario ſemper æquantur. Itaq; geometria hæc ſingularis eſt & myſterii cujuſdã plena, jam olim jactata in ſcholis geometrarũ. Proclus enim ſecundã partẽ de externis rectos quatuor æquantibus, ſic affirmat 11 cap 1 lib. Quemadmodum (ait) etiam quatuor rectis æquales externos habere angulos, non triangulis modo, ſed omnibus rectilineis ineſt. Item cap 7 lib 2. Quædam mutuo confirmantur. Nam & ex eo quod externi rectilineorum anguli quatuor ſunt rectis æquales: interiorum rectis æqualium multitudo, & contra hoc ex illo demonſtratur. Hæc ille. Ut autem ab externis probetur interiorum ratio, ſi Proclus ipſe demonſtraſſet, hoc illi beneficium deberetur: ab interioribus vero per genera probatur de externis. Nam trianguli tres anguli æquantur duobus rectis, quadrãguli quatuor, quinquanguli ſex, ſexanguli octo, ſeptanguli decem, atque ita deinceps á binario paribus, unde per 1 e 8 e 5 perpetuus externorum quaternarius concluditur.

5. *Rectilineum eſt triangulum aut triangulatum.*

Ut á linea lineatum, ſic á triangulo triangulatum dicatur.

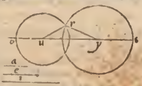
6. *Triangulum eſt quod comprehenditur á tribus lineis rectis.* 21 d 1.



Ut *aei*. Triangula figura definitur ab Euclide á tribus lateribus, unde & trilaterum tanquã ex cauſſa melius appellaretur quã triangulum ex effectis: præſertim cum tres anguli cum tribus lateribus nequaquam reciprocentur. Triangulum enim poteſt eſſe quatuor laterum, ut [illegible] velut cuſpidatum: Zenodorus

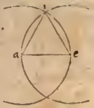
id voca-

Euclidis eſt 22 p 1: ubi proponit conſtituere triangulum ex tribus rectis, quæ ſint tribus datis æquales, & duæ quælibet ſecundum proximam trianguli legem majores reliqua. Problema igitur jubet ædificare triãgulum quod cumque optaveris. Optetur igitur triangulum é tribus rectis *a, e, i*, duabus quibuſvis reliqua majoribus: & recta ſit infinita, é qua tres ſecentur æquales datis *ou, uy, ys*, tum à terminis *y* & *u*, intervallis *ou* & *ys* peripheriæ concurrant in puncto *r*, radii ab eo concurſu ad terminos *u* & *y* conſtituent triangulum *ury*: radii enim illi æquabuntur rectis æquatis. per 3 c 5 e 5.

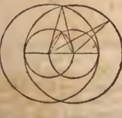


Et

2. *Si duæ æquales peripheriæ à terminis datæ rectæ ejuſque intervallo concurrant, rectæ à cõcurſu ad dictos terminos conſtituent triangulum æquilaterum ſuper datam.* 1 p 1.



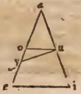
Ut hic ſuper *ae* conſtituitur triangulum *aei*, & ſimiliter inſtitui poſſit fabrica æquicruri é communi radio non æquãte datã, & varii é tribus diverſis radiis, quæ omnia in eadem figura hic propoſita ſunt: at



ſpecialia hæc in generali problemate continentur, neque novam ullam geometriam interpretantur.

8. *Si recta in triangulo eſt parallela baſi, ſecat crura proportionaliter: & contra.* 2 p 6.

Ejuſmodi igitur ratio eſt laterum in uno triangulo, ſequitur proportio laterum: ut hic in triangulo *aei* eſto *ou* parallela baſi, & intelligatur in *a* verticé tertia parallela. Itaque per 13 e 5 interſegmẽta ſunt proportionalia. Converſa cogitur ex antecedente, quia to-



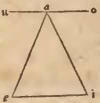
tum eſſet minus parte. Nam ſi parallela non ſit *ou*, eſt *yu*, hic per theſin & antecedentem *ao*, *oe*, *ay*, *ye* cum ſint proportionales, & prima *ao* ſit minor quam tertia *ay*, ſecunda *oe* eſſet minor quarta *ye*, totum parte.

9. *Trianguli tres anguli ſunt æquales duobus rectis* 32 p 1.

Hæc propoſitio locis infinitis Ariſtoteli propoſita eſt, & videtur philoſophus propoſitionis hujus argumento apodicticam analyſin commentus eſſe, ſed de tam horribili commento (quo tot ingenia tot ſeculis decepta ſint) eſt in ſcholis & logicis & geometricis. Explicata igitur eſt hactenus, comparatio in trianguli lateribus, explicatur deinceps ratio in angulis, qui ſimul æquantur duobus rectis. Veritas autem hujus propoſitionis (ait Proclus) ſecundum communes notitias apparet duobus perpendiculis ad baſin erectis: quantum enim inclinationis nutu imminuitur ex angulis rectis ad baſin, tantum aſſumitur ad verticem, duorumque rectorum æqualitas iſta compenſatione cõſtruitur: at hic in triangulo *aei*, ſi perpendiculares *oe* & *ui* ſenſim inclines ad *a*, percipies in tertio angulo, *a* tantum aſſumi, quantum detrahitur de angulis *e* & *i*. Sic Ariſtoteles 9 cap 2 Phyſ. repetit cauſſam theorematis hujus ex angulo recto: concludi tamen etiam poteſt: ut in



triangulo *aei* ſit per 3 c 12 e 5 parallela *ou* contra *ie*. Hic tres particulares anguli *iao*, *iae*, *eau* æquãtur duobus rectis per 1 c 8 e 5: ſed tribus illis interiores æquantur: primo *eai* ſibi ipſi, tum reliqui alternis, per 12 e 5. Ariſtoteles 9 Philoſo. quærit cur duo recti in triangulo, reſpondet quod ad unum punctum anguli ſunt æquales duobus rectis, quæ Euclidis demonſtratio eſt, de qua in ſcholis. Itaque

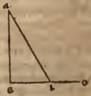


1. *Trianguli duo quilibet anguli ſunt minores duobus rectis.*

Nam ſi tres æquales ſunt, duo ſunt minores. Euclides fecit 17 p 1, quæ conſectarii loco hic aſſumitur. Et

2. *Continuato latere, exterior angulus æquatur duobus interioribus oppoſitis.*

Hæc ratio eſt interiorum angulorum in uno triangulo: ſequitur ratio exterioris cum interioribus oppoſitis, ut in *aei* triangulo continuetur latus *ei* in *o*, duo deinceps *aio*, & *aie*, per 1 c 8 e 5 æquantur duobus rectis, quibus æquantur interiores: tollatur communis *aie*, exterior relinquetur æqualis reliquis interioribus & oppoſitis



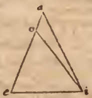
poſitis. Euclides fecit partem 32 p 1. *Itaque*

3. *Eſt major utrolibet interiore oppoſito.*

Euclides etiam hoc propoſuit 16 p 1. at pari lucro aſſumitur.

10. *Si triangulum eſt æquicrurum, eſt in baſi æquiangulum: & contra, 5 & 6 p 1.*

Sic Euclides trianguli affectionem complectitur nomine *ἰσοσκελοῦς* æquicruri, ſive triangulum ſit æquilaterũ ſive æquicrurum tantum. Antecedens patet per 1 c 6 e 3. Converſa patet per impoſsibile. Nam ſi crus alterũ majus eſſet, ut *a e*, amputetur per 2 c 5 e 5 æquale *o e*, & connectatur *o i*, tum per 1 c 6 e 3 baſis *o i* æquaretur baſi *a e*: at baſis *o i* minor eſt. Nam per 7 e *i a* & *a o* (quibus æquatur *a e* cũ *o e*) ponatur æqualis ipſi *a i*, & *a o* ſit cõmunis, majores ſunt ipſa *o i*. Itaque eadem *o i* eſſet æqualis ipſi *a e*, & minor eadem. Thaletis Mileſii hoc inventum eſt. *Itaque*



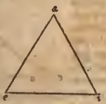
1. *Si trianguli æqua crura continuentur, anguli ſub baſim æquabuntur.*

Anguli enim *a e i* & *i e o*, item *a i e* & *e i u* bini æquãtur duobus rectis, per 1 c 8 e 5. Itaq; etiam inter ſe: detractis igitur interioribus æqualibus exteriores æquales relinquentur. Euclides fecit partem 5 p 1. *Et*



2. *Si triangulum eſt æquilaterum eſt æquiangulum: & contra.*

Conſectarium eſt è trianguli æquicruri lege de duobus & cruribus & angulis, ut in exemplo *a e i* demonſtrabitur. *Et*



3. *Angulus trianguli æquilateri valet duas tertias recti.*

Nam cum 3 anguli æquales æquentur 2 rectis, 1 æquabitur $\frac{2}{3}$. Eſt 23 p 1 Regio. *Et*

4. *Triangula ſex æquilatera complent locum,*

Ut hic. Nã ſexies $\frac{2}{3}$ recti, ſunt $\frac{12}{3}$ recti, id eſt quatuor recti: At quatuor rectis cõpletur planus locus, per 16 e 4 Ut hic.



·11. *Trianguli majus latus ſubtendit majorem angulum, & major angulus ſubtenditur á majore latere.* 19 & 18 *p* 1.

Ut hic *ai* majus eſto latus quam *ae*, major erit angulus ad *e* quam ad *i*. Secetur enim ex *ai* æqualis ipſi *ae*, ſitque *io*, tum angulus *aei* æquicrurus angulo *oie* major erit baſi per theſin, ideoque major per 3 c 6 e 3. Converſa patet eadem figura: ut *aei* angulus ſit major angulo *aie*. Itaque per idem 3 c 6 e 3 major eſt baſi. Quę enim de angulis generaliter illic proponuntur, huc ſpecialiter aſſumuntur de angulis in triangulo.



12. *Si recta in triangulo biſecat angulum, ſecat baſin ratione crurum: & contra.* 3 *p* 6.

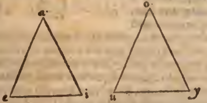
Supereſt miſta proportio de lateribus & angulis. Eſto triangulum *aei*, & biſectus ſit angulus *eai* per rectam *ao*, dico ut *ea* eſt ad *ai*, ſic *ea* eſſe ad *oi*: erigatur enim parallela *iu* per 3 c 12 e 5 contra *oa*, & continuetur *ea* infinite, ſecabit ipſam *iu*, per c 11 e 5: ſecetur igitur in *u*. Hic per 13 e 5, ut *ea* ad *au*, ſic *eo* ad *oi*. At *au* æquatur ipſi *ai* per 10 e. Nam angulus *uia* æquatur angulo alterno *oai* per 12 e 5, & per theſin angulo æquali *oae*, & per 12 e 5 æquatur interiori angulo *aui*, & per concluſum æquali *uia*. Itaque per 10 e, *au* & *ai* æquantur. Ergo ut *ea* ad *ai*, ſic *eo* ad *oi*. Converſa ſimiliter demonſtratur in eadem figura. Nam ut *ea* ad *ai*, ſic *eo* ad *oi*, & ſic *ea* ad *au*, per 8 e. Itaque æquantur *ai* & *au*, item anguli *eao* & *oai* æquantur angulis ad *u* & *i* per 12 e 5, æqualibus inter ſe per 10 e.



de comparatione triangulorum.

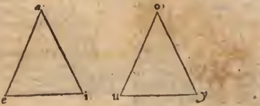
TRiangula æquilatera ſunt æquiangula. 8 p 1.

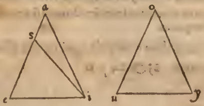
Atque hæc de geometria unius trianguli, ſequitur triangulorum duorum inter ſe comparatio, primum ratio è lateribus & angulis: unde triangula inter ſe dicuntur æquilatera & æquiangula. Primo ex æqualitate laterum, æqualitas ducitur & angulorũ. Triangula igitur hic conjunctim æquilatera dicũtur, quorum latera ſigillatim ęqualia ſint, primum primo, ſecundum ſecundo, tertium tertio, etiam ſi ſingula triangula ſeparata ſint inæquilatera. æquales igitur angulos oſtendit æqualitas laterum, per 1 c 6 e 3, ut hic.



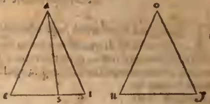
2. *Si duo triangula æquantur angulis vel duobus æquicruris vel binis æqualis aut cruris aut baſis duorum, ſunt æquilatera.* 4 & 26 p 1

Prima pars patet ſic. Sunto triangula *aei*, *ouy*: quia anguli ad *a* & *o* æquales ſunt æquicruri, æquantur baſi per 1 c 6 e 3. Secunda ſic. Sunto triangula *aei* & *ouy* æqua binis angulis ad *e* & *i*, ad *u* & *y*, & æquentur crure *ei* & *uy*: dico æquilatera eſſe. Nam ſi latus *ae* (exempli cauſſa) ſit majus latere *ou*, amputetur æquale *es*, & connectatur *is*. Hic per antecedentem triangula *sei*, & *ouy* æquiangula erunt, & angulus *sie* æquabitur angulo *oyu*, cui totus *aie* æquatus eſt ex theſi. Itaq; ęquarentur totũ & pars. Quare latus *ae* non eſt inæquale, ſed æquale, & per antecedentem partẽ





triangula *aei* & *ouy* æquicrura æquantur angulo crurum, itaque & baſi *ai* & *oy*.



Tertia pars ſic cogitur, ut in triangulis *aei* & *ouy* ſint anguli ad *e* & *i* ad *u* & *y* æquales, ut prius, & baſis *ae* anguli ad *i* æqualis baſi *ou*, anguli ad *y*: dico æquilatera eſſe. Nam ſi latus *ei* ſit majus latere *uy*, amputetur æqualis *es*, & connectatur *as*. Itaque per antecedentem duo triangula *aes* & *ouy* æqua angulo crurũ æqualium ſunt æquiangula, & angulus *ase* æquatur angulo *oyu* æquanti per theſin angulum *aie*. Itaque *ase* æquatur *aie* exterior interiori, contra 2 c 9 e 6. Ergo baſis *ei* non eſt inæqualis ipſi *uy*, ſed æqualis. Itaque ut prius duo triangula *aei* & *ouy* æqua angulo crurum æqualium ſunt æquilatera. Hic notabis ex æqualitate binorum angulorum, & duorum laterum æquilatera triangula fieri: neque ſatis eſſe angulos duos æquales æquari baſi, ut æqualitas crurum cõcludatur. De hoc enim elencho monuimus 2 c 6 e 3. Quod ſi binos æques angulos non ad crus æquale, accidet triangulum multo majus, minori tamen æquale eſſe, quod apud Proclum Porphyrius diſerte & accurate expoſuit: de quo erit in ſcholis.

3. *Triangula æquantur ternis angulis.*



Quia tres anguli in quolibet æquãtur duob. rectis: ut hic maximum triangulum angulis ſimul acceptis eſt æquale minimo, neque tamen æquiangulum propterea exiſtimetur: æquiangula enim triangula ſunt, cum ſinguli anguli æquantur ſingulis: non autem univerſi univerſis.

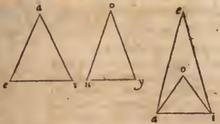
Itaque

Si bini anguli duorum triangulorum æquantur, reliqui æquantur.

Terni nempe æquantur inter ſe: ideoque ſi ab æqualibus tollas æquales, relinquentur æquales.

4. *Si triangulum triangulo æquicrurum eſt majus baſi, eſt majus angulo: & contra, 25 & 24 p 1.*

Adhuc



Adhuc ratio fuit æqualitatis in lateribus & angulis trian/gulorum, ſequitur ratio inæqualitatis aſſumpta è communi & generali inæqualitate angulorum. Primum eſt è 3 c 6 e 3. Ut vides in *aei* & *ouy*.

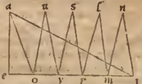
5. *Si triangulum triangnlo in eadem baſi eſt minus interioribus cruribus, eſt majus angulo crurum.*

Hoc item eſt è 4 c 6 e 3, Euclidi eſt 21 p 1 de triangulo in eadem baſi per tri/angulum majus comprehenſo, & tamen ſine converſa: ut *eoi* interius in eadem baſi minus cruribus, quam *aei*.

6. *Triangula æquealta ſunt ut baſes.* é 1 p 6.

Ergo hæc triangulorum ratio eſt, ſequitur proportio triangulorum, primum de recta cum baſibus. Conſectarium eſt é 12 e 4, Itaque

1. *Inæquali baſi ſunt æqualia.*



Id conſectarium fuit generale 12 e 4, unde etiam concluſit Archimedes 7 theo. 1 de ſphæ. Si triangulum triangulis æquealtum habet baſim baſibus æqualem, æquatur univerſis: ut hic vides *aei* æquari triangulis *aeo*, *uoy*, *syr*, *lrm*, *nmi*. Hinc etiam concludes triangula æquilatera eſſe æqualia, quia æquealta ſunt inæquali baſi, quod Euclides 4 p 1 concluſit per *ἐφαρμοσιν*. Et

2. *Si recta à vertice trianguli biſecat baſin, biſecat triangulum, & diameter eſt trianguli.*

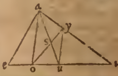


Ut hic vides. Biſegmenta enim ſunt triangula æquealta, nẽpe communis verticis intra eaſdem parallelas, & in baſibus æqualibus. Ergo æqualia & recta illa erit diameter per 5 e 4, quia eſt per centrum.

7. Si recta

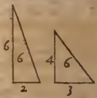
7. Si recta eſt á vertice trianguli ad datum in baſi punctum non medium, & parallela ſit á medio baſis in latus, recta á vertice parallelæ in dictum punctum biſecabit triangulum.

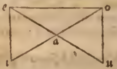
Eſto triangulum *aei*, & *ao* ſecet baſin *ei* in *o* inæqualiter, & *uy* ſit parallela ab *u* medio baſis in latus *ai*, dico rectam *yo* biſectricem eſſe trianguli: cõnectatur enim *au*, ea biſecabit per 2 c 7 e. Jam triangula *ayu* & *you* æquantur, quia æquealta in eadem baſi: commune tollatur *ysu*, relinquentur æqualia *asy* & *osu*, commune rectilineum *ysui* addatur utrique æqualium, tum *oyi* æquabitur dimidio *aui*: Itaque & reliquum rectilineum *aeoy* dimidium erit. Jordani eſt 21 p 1, ubi ſunt 22 & 23 p, de dato puncto intra & extra triangulum, quæ geometria ſi ab aliquo ſine mendis ederetur, permagna eſſet utilitas quidlibet figura triangula comprehenſum in dato puncto biſecandi, ut plerumque eſt inter cohæredes puteus, fons, arbor, & ſimilia.



8. Si triangula æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, ſunt æqualia: & contra. 15 p 6.

Proportio directa in triangulis ea eſt, reciproca ſequitur. Conſectarium eſt é 13 e 4, quod manifeſtum eſt, quoties æqualis angulus rectus eſt: tum enim crura iſta æquales ſunt altitudines & baſes: Ut hic vides ſeparatis triangulis. In triangulis autem obliquangulis licet crura non ſint altitudines, veritatis tamen cauſſa eadem eſt: ſiquis tamen demonſtrationem requirat, ea ſic eſt. Eſto igitur diagramma in triangulis *aei*, *aou*, & anguli *oau* & *eai* æquales, ſitque ut *ua* ad *ae*, ſic *ia* ad *ao*: dico triangula *aou*, *eai* æquari. Nam *uao* ad *oae* eſt ut *ua* ad *ae* per 6 e, & *ia* ad *ao* per theſim, eſt ut *eai* ad *eao*. Itaque *uao* & *eai* ad *eao* ſunt proportionalia, ideoque æqualia ſunt inter ſe. Converſa eodem ſorite, ſed retrogrado concluditur. Nam *ua* ad *ae* eſt ut *uao* ad *oae* per 6 e, & ut *eai* per theſin, quia æqualia, & ut *ia* ad *ao* per idem. Quare *ua* eſt ad *ae*, ſicut *ia* ad *ao*.

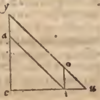


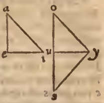


9. Si duo triangula ſunt æquiangula, ſunt proportionalia cruribus: & contra. 4, 5 p 6.

Comparatio & rationis & proportionis triangularis anteceſsit, reſtat extrema ſimilitudo triangulorum, quæ conſtat illa quidem é ratione angulorum & proportio-

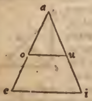
proportione crurum. Itaque merito angulorum ratio præponitur, unde crurum non ratio, ſed proportio poſterior colligitur. Sunto igitur triangula *aei* & *iou* æquiangula, & ad eandem rectam *eiu* communi puncto *i* comparata: *oi* & *ae* cum anguli ad *i* & *e* ponantur æquales, erunt parallelæ per 12 e 5. Itaque per 1 c 12 e 5 *uo* & *ea* continuatæ concurrent. Idem rectæ *ai* & *yu* ſunt per 12 e 5 parallelę, quia angulus *aie* æquatur interiori oppoſito *oui*. Itaque cum *ai* ſit parallela baſi *yu*, per 12 e 5 erit *ea* ad *ay*, id eſt per 5 c 12 e 5 ad *io* ut *ei* ad *iu*, & alterne *ea* ad *ei* ut *io* ad *iu*. Hæc prima eſt proportio. Item cum *oi* ſit parallela baſi, *ye* erit *yo*, id eſt per 5 c 12 e 5 *ai* ad *ou* ut *ei* ad *iu*, & alterne *ai* ad *ie*, ut *ou* ad *ui*. Hæc ſecunda eſt proportio. Denique æquè ordinatè *ae* eſt ad *ai*, ut *oi* ad *ou*. Quare ſi triangula ſunt æquiangula, ſunt proportionalia cruribus. Converſa ſic patet. Sunto triangula proportionalia cruribus *aei*, *ouy*, & ut *ae* eſt ad *ei*, ſic eſto *ou* ad *uy*, & ut *ai* eſt ad *ie*, ſic eſto *oy* ad *yu*. Tum ad puncta *u* & *y* æquentur per 5 c 6 e 3 anguli angulis ad *e* & *i*, & fiat triangulum *uys*, reliqui anguli ad *a* & *s* æquabuntur per c 3 e, & triangulo *yus* erit æquiangulum datum *aei*, & per antecedentem cruribus proportionale: ita duo triangula *ouy* ex theſi, & *uys* ex fabrica ſunt cruribus proportionalia eidem *aei*, & ut *ae* ad *ei*, ſic *ou* ad *uy*, ſic *su* ad *uy*. Itaque cũ *ou* & *su* ad idem *uy* ſint proportionalia, æquantur: item ut *ai* ad *ie*, ſic *oy* ad *yu*, ſic item *sy* ad *yu*. Itaque *oy* ad *sy* cum ſint proportionalia ad *yu*, æquantur: *yu* commune latus eſt. Triangulum igitur *ouy* triangulo *syu* eſt æquilaterum: & per 1 e æquiangulum, ideoque æquiangulum triangulo *aei*: quod erat propoſitum. Generaliter autem prædictum eſt 1 c 14 e 4 de lateribus homologis ſubtendentibus æquales angulos. Itaque



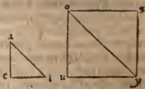


Si recta in triangulo eſt parallela baſi, deſecat triangulum æquiangulum toti, & minus baſi.

Ut in *aei* triangulo *ou* deſecat triangulum *aou*, per 12 e 5 æquiangulum toti, & minus baſi, ut patet per 9 e, & per alternationem laterum.



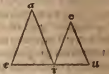
10. *Si duo triangula ſunt proportionalia cruribus æqualis anguli, ſunt æquiangula. 6 p 6.*



Sunto igitur propoſita triangula *aei* & *ouy* æqua angulo ad *a* & *o*, & cruribus *ea* ad *ai* ſicut *uo* ad *oy*, & per 5 c 6 e 3 æquentur anguli *soy* & *oys* angulis *eai* & *eia*, reliqui ad *s* & *e* per c 3 e æquabuntur: Hic vides *aei* triangulum æquiangulum eſſe *oys*. Jam per 9 e, ut *ea* ad *ai*, ſic *so* ad *oy*, ideoque per theſin, ſic *uo* ad *oy*. Itaque cum *uo* & *os* ſint proportionalia ad *oy* æquantur. Denique ſi commune addatur *oy*, æquantur crura *ou* & *oy* cruribus *so* & *oy*, & per c 3 e reliqui anguli. Quare ſecundum triangulum tertio ſimiliter æquiangulum erit: ideoque ſi triangula proportionalia cruribus æquantur angulo crurum, ſunt æquiangula.

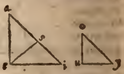
11. *Si cruribus proportionalia & alterne parallela intermedium angulum faciunt, baſes habent in rectam continuas.* 32 p 6.

Cauſſa eſt è 1 c 8 e 5. Nam duos utrinque facient cum incidente *ai* duobus rectis æquales. Sunto triangula *aei* & *oiu* proportionalia cruribus, ut *ea* ad *ai*, ſic *io* ad *ou*, & *ea* ſit parallelum ipſi *io* & *ai* ipſi *ou*, item faciat intermediũ angulum *aio*, nempe intermediis cruribus *ai* & *oi*. Dico baſes *ei* & *iu* continuari in rectam. Cũ enim ſint parallelæ ex theſi *ae* & *oi*, recta *ai* faciet per 12 e 5 angulos ad *a* & *o* æquales alterno *aio*. Ideoque æquales inter ſe: tumque per 10 e data triangula ſunt æquiangula. Itaque angulus *oiu* æquatur angulo *aei*. Tres igitur anguli *oiu*, *oia*, *aie* per 3 e æquantur tribus angulis trianguli *eai* æquãub. per 9 e 6 duos rectos, ideoque & ipſi duobus rectis æquantur. Quare per 1 c 8 c 5 *ei* & *iu* in rectam continuantur. Hæc propoſitio adhibetur 17 p 13, & 29 p 1. Apollonii.



12. *Si habeant unum angulum æqualem, alterum cruribus proportionalem, tertium homogeneum, ſunt æquiangula.* 7 p 6.

Sunto propoſita triangula æqua angulo ad *a* & *o*, & proportionalia cruribus angulorum ad *e* & *u*, & reliquo angulo ad *i* & *y* homogenea, id eſt ut ambo anguli ſint vel acuti, vel obtuſi, vel recti, ſed primo acuti. Dico reliquos ad *e* & *u* æquari: ſecus per 5 c 6 e 3 æquetur *aes* ipſi *ouy*, habebis per 1 c 3 e æquiangula, & angulus *ase* æquabitur angulo *oyu*, acutuſque eſt uterque, ac per 9 e *aes*, *ouy* à cruribus proportionalia: atque ut *ae* ad *es*, ſic *ou* ad *uy* id eſt per theſim, ſic *ae* ad *ei*. Itaque quia eadem *oa* ad duas *es* & *ei* habet eandem rationem, æquantur *es* & *ei*, & ideo per 10 e 6 anguli ad baſim in *s* & *i* æquantur. Acutus igitur uterque, acutus item & *ase* contra 1 c 8 e 5. Idem vero prorſus accidet utroque reliquo vel obtuſo, vel recto. Pars autem ultima de recto patet per c 3 e.



de generibus triangulorum.

Triangulum eſt rectangulum vel obliquangulum.

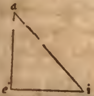
Partitio trianguli ſequitur ex angulis é communibus differentiis: ſed hic ſpecialis primum, & maximi momenti, ut erit in quadrangulis & priſmatis.

2. *Triangulum rectangulum eſt quod habet unicum angulum: obliquangulum quod nullum.* 27 d 1.

Rectangulum triangulum in geometria præcipuas vires habet, & à præſtantibus mathematicis non immerito magiſter matheſeos appellatur. Itaque

1. *Si duæ perpendiculares connectantur, conſtituent triangulum rectangulum.*

Ut in a e i. Hæc fabrica rectanguli ducatur é definitione recti anguli. Perpendiculares enim rectæ recti anguli ſunt artifices, ut patet 8 e 3.



Et

2. *Si trianguli angulus ad baſin rectus eſt, perpendicularis à vertice eſt crus alterum.*

Ut in eodem exemplo.

3. *Si triangulum rectangulum eſt æquicrurum, uterque angulus ad baſim eſt dimidius recti: & contra.*

Ut in a e i: æquantur enim ambo uni recto per 9 e 6, & inter ſe per 10 e 6.



Itaque

1. *Si trianguli angulus æquatur reliquis, eſt rectus.*

Quia æqualis dimidio duorum rectorum. Conſectarium eſt Euclidis ad 31 p 3.

Et

2. *Si recta à vertice trianguli biſecans baſin eſt æqualis biſegmento, angulus verticis rectus eſt.*

Ut in *aei* recta *ao* biſecans *ei* baſin in *o* æqualis ſit ipſi *eo* di-



midio baſis, facit triangula æquicrura, & particulares verticis angulos æquales extremis ad *e* & *i* per 10 e 6. Eſt Jordani 1 p. Itaque verticis angulus æquatur reliquis. Ideoque per 1 e rectus.

4. *Perpendicularis in triangulo ab angulo recto in baſim ſecat triangula ſimilia toti & inter ſe. 8 p 6.*

Ut in triangulo *aei* perpendicularis *ao* ſecat triangula *aoe* & *aoi* ſimilia toti, quia ipſi æquiangula: cum rectus utrinque ſit unus & alter communis in *i* & *e*. Reliquus igitur æ-



quatur reliquo, per e 3 e 7. Itaque particularia triangula ſunt æquiangula toti, proportionaliaque cruribus æqualium angulorum, per 9 e 7: ſimilia vero inter ſe triangula eſſe patet per 3 c 14 e 4. Itaque

1. *Perpendicularis eſt proportionalis inter ſegmenta baſis.*

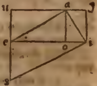
Ut *io* ad *oa*, ſic *oa* ad *oe*, quia æqualium angulorum crura ſunt proportionalia per 4 e. Hinc Platonis meſographus inventus, de quo in ſcholis. Et

2. *Crus utrumlibet eſt proportionale inter baſim & baſis ſegmentum conterminum.*

Ut enim *ei* ad *ia* in toto triangulo, ſic *ai* ad *io* in majore. Sic enim homologa ſunt latera, quæ ſubtendunt æquales angulos per 1 c 14 e 4: item ut *ie* ad *ea* in toto triangulo, ſic *ae* ad *eo* in minore.

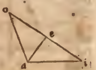
5. *Si baſis trianguli ſubtendit rectum, rectilineum ad eam ſitum æquatur rectilineis ad crura ſimilibus ſimiliterque ſitis: & contra. é 31 p 6.*

Sit triangulum rectangulum *aei*, & triangula *eau*, *aiy*, & iis ſimile ſimiliterque ſitum per 4 c 14 e 4, ſit triangulum *ies*. Dico ipſum duobus illis æquari. Sit ab angulo recto *a* perpendicularis *ao*, hæc oſtendet proportionales bis ternas per 2 c 4 e, nempe *ie*, *ea*, *eo*, item *ei*, *ia*, *io*. Itaque per 1 c 15 e 4, ut *ie* eſt ad *eo*, ſic triangulum *ies* eſt ad triangulum *eau*, & ut *ei* eſt ad *oi*, ſic triangulum *eis* eſt ad triangulum *aiy*: At *ei* æquatur *eo* & *oi*, ſuis nempe partibus. Quare per ſecundam compoſitionem in arithme-



tica 9

tica 9 cap. 2 lib. triangulum *e i s* æquatur triangulis *e a u* & *i a y*. Euclides nominat hic εἴδει καὶ εἴδεσι ſpeciem & ſpeciebus, id eſt figuram & figuris. Nos ad plana rectilinea accommodavimus. Cauſſa dicetur in ſcholis. Converſa ſic probatur. Sit triangulum *a e i* & perpendicularis erigatur *e o* ſuper *a e* ęqualis ipſi *e i*, & connectatur *o a*. Hic per præcedentem ſita ad *o e* & *e a* rectilinea, id eſt per fabricam ad *a e* & *i e* æquantur rectilineo ad *a o* ſimili & ſimiliter ſito, & ex theſi æquantur ſimili & ſimiliter ſito ad *a i*. Itaq; ad *o a* & *a i* ſimilia rectilinea cum ſint æqualia, homologa latera habebunt æqualia, per 1 c 14 e 4, & triangula duo fient æquilatera, & per 1 e 7 æquiangula. Rectus autem eſt ex fabrica *o e a*, cui æqualis concluditur *a e i*. Itaque *a e i* per 8 e 5 eſt rectus.



6. *Triangulum obliquangulum eſt obtuſangulum vel acutangulum.*

Partitio eſt è ſpecialibus differentiis anguli.

7. *Obtuſangulum quod habet unum obtuſum angulum.* 28 *d* 1.

Rectus unicus eſt in triangulo. Itaque & obtuſus. Itaque

1. *Si obtuſus angulus eſt ad baſim, perpendicularis à vertice cadit extra.*

Ut hic in *a e i* perpendicularis *i o*, ut patet 2 c 2 e. Et

2. *Si trianguli angulus ſit major reliquis, eſt obtuſus.*

ut patet è 1 c 3 e. Et

3. *Si recta à vertice trianguli biſecans baſim, eſt minor biſegmento, angulus verticis obtuſus eſt.*

Ut in *a e i* ſit *e o* biſecãs minor, ut patet per 2 c 3 e.



8. *Triangulum acutangulum eſt quod habet omnes acutos angulos.* 29 *d* 1.

Itaque

1. *Perpendicularis à vertice cadit intra.*

Ut in *a e i* perpendicularis *e o*, ut patet per 2 c 2 e.

2. *Si trianguli angulus ſit minor reliquis, eſt acutus.*

Ut patet per 1 c 3 e.

3. *Si recta à vertice trianguli biſecans baſim eſt major biſegmento, angulus verticis acutus eſt.*

 Ut in *a e*

ut in *ae* *i* ſit biſecans *a o* major biſegmento,



angulus *a e i* erit acutus, ut patet per 2 c 3 e.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. IX.
de Geodæſia rectarum è triangulis rectangulis ſimilibus

TRiangulorũ rectangulorum ſimilium geometria, cum pleroſque alios uſus habet, tum imprimis geodęſiã linearũ rectarum ſuppeditat, & magiſterium geometriæ in triangulis rectangulis antea collocatum, tandem verum magiſterium hic eſſe deprehendetur. Continebit enim geodęſiam rectarum, poſteaque geodęſiam planorum & ſolidorum, è dimenſis lateribus, quæ rectæ lineæ ſunt. Ad rectarum igitur geodęſiam radius inſtrumentum omnium geometricorum inſtrumentorũ præſtantiſsimum & commodiſsimum adhibetur.

1. *Radius eſt norma crurum inæqualium.*

Inſtrumentum peramtiquum eſt, & vulgo baculus Jacob dicitur, tanquam à Sancto Patriarcha illo jam olim inventus ſit. Archimedes in arenæ numero ſimile quidpiam notavit, & Hipparchus inſtrumento non abſimili auſus eſt rem etiam diis improbam, annumerare poſteris ſtellas, & ſidera velut ad normam expangere, ait Plinius. Et ſane radius non ſolum metiendis terris, ſed aſtris loco & ordine definiendis, omnibuſque cæleſtis civitatis regionibus ac viis deſcribendis præcipue uſurpatur: & ſic utrumque uſum Virgilius eleganter expreſsit.

—ecquis fuit alter, Egl. 3
Deſcripſit radio totum, qui gentibus orbem? item
—cælique meatus. 6 Aen.
Deſcribent radio & ſurgentia ſidera dicent.

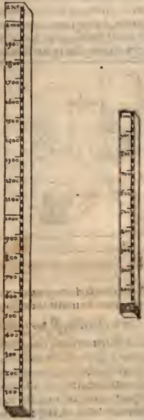
Arabes tandem, ut Rabi, Levi, ſed proximis temporibus Germani imprimis excoluerunt, Regiomontanus, Vernerus, Schonerus. Appianus maxime omnium Gemma opere ſeparato illuſtravit. Radius igitur ſuis & geometricis partibus deſcribatur: aſtronomica autem diſtributio in ſuum tempus reſervetur, tum uſus adhibeatur dimenſionibus linearum. Radius autem pro arbitrio menſoris parvus aut magnus eſt. Quantitas enim inſtrumenti aliter definiri non poteſt.

2. *Radii crura ſunt index & tranſverſarium.*

3. *Index*

3. *Index eſt duplus ſeſquidecimus tranſverſarii.*

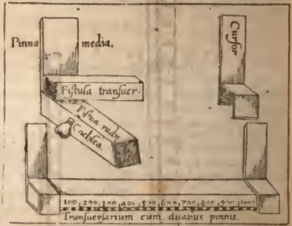
Ut hic.



4. *Tranſverſarium eſt per indicem volubile modo ſublimius, modo humilius.*

Hæc ratio in definiendis & componendis radii cruribus perpetua eſt: ut ſi trāſverſarium ſit 10 partium, index ſit 21. Tranſverſarium itaque ſit 2000 partium, index erit 4200: & quia index ſuſtinere debeat, tranſverſarium ſuſtineri, index eſto craſsior, tranſverſarium tenuius. Verum è qua materia ſit radii pars utraque ænea, lignea nihil intereſt, modo firma ſit & ſtabilis: tranſverſarium tamen

tamen commodius æneis fiſtulis volvetur, & per indicem & per ſe ſurſum deorſumve ad rectos ita contiguis, ut ore alterno latus alterius contingatur: tertia fiſtula ſit volubilis per totum tranſverſarium, quæque ideo curſor appelletur: quarta & quinta fiſtulæ tranſverſarium fixæ & immobiles terminent ad tertiam & ſecundam æquealtæ pinnis, ad opticam lineam, ubi opus erit diſterminandum, & tanquam certis in tranſverſario punctis definiendum. Tres primæ fiſtulæ cochleis ſiſtentur, ubi res exiget. His igitur fiſtulis tranſverſarium tantum efficitur, quanto opus fuerit, ut hic vides. fabrica radii dicta eſt, uſus ſequitur, ad quem communiter attinet primo juſtam eſſe diſtantiam: nec enim viſus eſt infinitus: alterum obductum oculum: vis enim optica è duobus oculis in unum conducta firmius collimat, & radius ad os genæ commodius applicatur: Hic enim oculus eſt tanquam centrum circuli, cui inſcriptum ſit tranſverſarium: manus quietas: nam ſi trepident, geodæſiæ proportio turbabitur. Item ſtationis locus à medio pedis.



5. *Si viſus eſt ab initio cruris alterius, eſt per terminum reliqui, cruſque alterum eſt rectum metiendæ magnitudini, reliquum parallelum.*

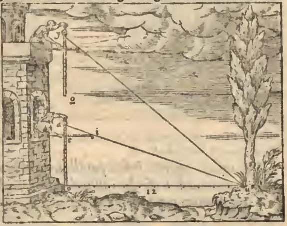
Hæc communia præponuntur, quod viſus ſit ab initio indicis per terminum tranſverſarii, vel contra ab initio tranſverſarii per terminos indicis: quodque index ſit rectus metiendæ lineæ tranſverſarium parallelum, vel contra. Perpendiculum vero indicis plumbo ſuſpenſo probari poteſt in longitudine: in altitudine aũt & latitudine fides oculis adhibẽda eſt, tametſi modicus deflexus perpendiculi ſenſilẽ errorem adferre non poteſt. Terminum vero tranſverſarii intellige, qui linea viſus efficitur, ſive extrema pinna, ſive quocunque alio loco curſor.

6. *Longitudo & altitudo triplicem menſuram habent, primam & ſecundam unius diſtantiæ, & quidem data alterius dimenſione pro tertio proportionali, tertiam duplicis diſtantiæ, qualis tantum eſt dimenſio latitudinis.*

7. *Si vi-*

7. Si viſus ſit ab initio indicis recti in metam longitudinis, erit ut ſegmentum indicis ad ſegmentum tranſverſarii, ſic menſoris altitudo ad longitudinem.

Theorema eſt Euclidis in opticis, quod & ideo libentius aſſumpſimus, ut planum fieret, hunc etiam geometricum uſum geometriæ doctori nequaquam alienum geometricæ dignitatis viſum eſſe. Sit igitur ſegmentum indicis á vertice nempe ad tranſverſarium, 6 partium, ſegmentum tranſverſarii ab indice nempe ad opticam lineã, 18. Index qualis hic eſto menſor altitudo quatuor pedum, longitudo erit 12 pedũ. figura ſic eſt: Ut enim *a e* ad *e i*, ſic *a o* ad *o u*, ut patet per 9 e 7. Sũt enim triangula ſimilia. Nam *a e i* & *a o u* recti, & qui ad *a* communis: reliquus igitur æquatur reliquo per c 3 e 7.



Idem erit metiendi modus ex altiore loco, ut ex *y*, ſegmentum indicis 5 partium, tumque ſit altitudo 10 pedum, tranſverſarium 6: Neque vero quidquam intereſt, utrum longitudo ſit in ſubjecto plano, an in aſcenſu deſcenſuvé montis, ut in ſubjecta figura. Hoc modo poteris metiri latitudines fluminũ, vallium, foſſarum. Longitudo enim ſemper eſt hoc modo, ut in mari diſtantiam navium liceat metiri,



q̄ſio & Thales Mileſius apud Proclum 26 p 1 metitur. Exēplū hic habes. Deinceps in dimenſione longitudinis & altitudinis



viſus eſt in metam altitudinis. Quod prædico ne fruſtra ſæpius iteretur. Lōgitudinis ſecunda dimenſio ſic eſt.

8. *Si viſus ſit ab initio indicis paralleli, erit ut ſegmentum tranſverſarii ad ſegmentum indicis, ſic data altitudo ad longitudinem.*

Ut ſi ſegmentum tranſverſarii ſit 120 partium, data altitudo 400 pedum, ſegmentum indicis 210 partium: Longitudo per auream regulam erit 700 pedum. figura ſic eſt, ut demōſtratio par ſuperioribus, vel etiam facilior. Triangula enim ſunt æquiangula, ut prius. Ut igitur *o u* ad *i a*, ſic *e i* ad *i a*. Hæc dimenſio eſt prima ſecundaque

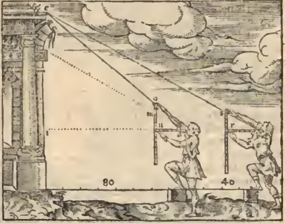


longitudinis per ſimplicem diſtantiam, tertia ſupereſt per duplicē, ubi tranſverſarium ſi recedenti copia ſit major, deprimetur in ſecunda diſtantia.

9. *Si viſus*

9. *Si viſus ſit ab initio tranſverſarii paralleli, erit ut in indice differentia majoris ſegmenti ad minus, ſic differentia ſecundæ diſtantiæ ad longitudinem.*

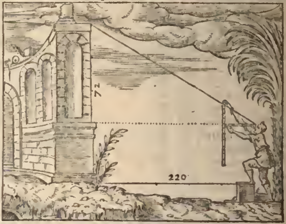
Hæc geodęſia paulo ſubtilior eſt. figura ita eſt, in qua collimatio prima ſit ab *a* initio tranſverſarii & è quæſita longitudine *ai* per *o* terminum indicis in *e* metam altitudinis: & ſegmētum indicis ſit *ou*. Secunda collimatio ſit ab *y* initio tranſverſarii é diſtantia majore per *s* terminum indicis in eandem metā *e*, & ſegmentum indicis ſit *sr*: Hic peracta dimenſio eſt ſumpta differentia ipſius *ou* ſupra *sr*. Demonſtrationis ergo cætera effinguntur.



Parallela igitur contra *ye* in prima diſtantia ab initio tranſverſarii ſit *aml*. Hic primum *mu* æquatur ipſi *sr*. Nam *mua* & *sry* triangula æquantur crure *ua* & *ry* per theſin (quia tranſverſarium eodem ſuo loco manet) & anguli ad ipſum *mua*, *uam* æquantur angulis *sry* & *rys*, quia illi recti, hi exterior & interior oppoſiti. Itaque per 2 e 7 ſunt æquilatera, & *om* eſt differentia ſegmētorum indicis. Deinde ut *om* eſt ad *mu*, ſic *el* ad *li*, ut æquatio ternorum graduum oſtendit. Nam per 9 e 7 ut *om* ad *ma*, ſic *el* ad *la*, & ut *ma* ad *mu*, ſic *la* ad *li*. Itaque ex æquo, ut *om* ad *mu*, ſic *el* ad *li*, & per 8 e 6 ſic *ya* ad *ai*: ut ſi differentia primi ſegmenti ſit 36 partium, ſecundum ſegmentum ſit 72, differentia ſecundæ diſtantiæ 40 pedum, quæſita longitudo erit 80 pedum. Atque hic altitudo nulla definite datur, ut faciat ullum principis proportionis terminum: Altitudo tamen licet dimēſionis ignotæ eſt quæſitæ longitudinis terminus: ideoque adjumento ad ratiocinationem quæſtionis, quia perpendiculariter inſiſtens extremæ longitudini intelligitur. Tertia igitur iſta longitudinis geodęſia ſæpe eſt neceſsitatis, cū ſuperiore neutro modo longitudo capi poſsit, interjecto quippe vel muri vel arboris vel montis impedimēto, ut meta longitudinis videri nequeat, qui primus modus eſt, neque altitudo contermina extremæ longitudini data ſit, qui ſecundus eſt modus. Adhuc dimenſio fuit longitudinis triplex prima & ſecunda é data altitudine, tertia é diſtantia duplici: ſequitur altitudinis dimenſio item ſimilis triplex, & altitudo eſt perpendicularis á vertice magnitudinis ad ſolum menſoris, quomodo definita eſt altitudo 6 e 4. Prima geodæſia altitudinis ſic eſt.

10. *Si viſus ſit ab initio tranſverſarii recti, erit ut ſegmentum tranſverſarii ad ſegmentum indicis, ſic data longitudo ad altitudinem.*

Deducitur è 18 th. 2 Euclidis in opticis, ubi Euclides umbra ſolis utitur pro radio optico, qui nunc adhibetur: & hic altero exemplo docuit Euclides geometriæ uſum nequaquam ſibi ſordidum vel ingratum eſſe. Sit igitur ſegmentum tranſverſarii 60 partium, ſegmentum indicis 36, longitudo pedũ 20, altitudo erit



per auream regulam 72 pedum. figura ſic eſt, & demonſtratur per 9 e 7 ut prius: ſed additur menſoris altitudo, quæ ſi ſit quatuor pedum, altitudo tota erit 76.

Itaque in everſa altitudine.

Si viſus ſit ab initio indicis paralleli, erit ut ſegmentum tranſverſarii ad ſegmentum indicis, ſic data longitudo ad altitudinem.

E conclusa nempe altitudine ſubducto quod ſupereminet, relinquetur altitudo putei. Theorema eſt 20 in Euclidis opticis, id eſt tertium teſtimoniũ de geometriæ uſu geometris nec illiberali nec ingrato, nempe de dimenſione putei, rupis, turris. Itaque ſegmentum tranſverſarii ae ſit 5 partium, ſegmẽtum indicis ei 13, diameter putei (quæ modo eſt pro longitudine) 10 pedum, quæ ſuperne ſumatur pro æquali in fundo, oppo-

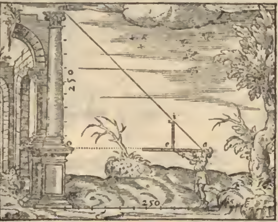


ſita alti-

ſita altitudo per 9 e 7 & auream regulam erit 26 pedum, unde tollendum ſegmentum indicis ſupra oram putei, relinquetur vera altitudo, ut ſi ſegmentum illud 13 partium valeat pedes 2, altitudo erit pedum 24. Secunda altitudinis dimenſio.

II. *Si viſus ſit ab initio indicis recti, erit ut ſegmentum indicis ad ſegmentum tranſverſarii, ſic data longitudo ad altitudinem.*

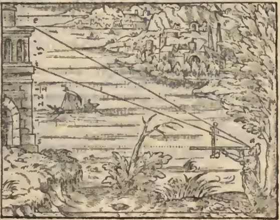
Ut ſi indicis ſegmentum eſt 60 partium, trãſverſarii ſegmentum 60 partiũ, lõgitudo data 250 pedes, per auream regulam altitudo erit 250 pedum: ut vides in ſubjecto exemplo: ut enim *ae* ad *ei*, ſic *ao* ad *ou* per 9 e 7. Sed inventæ altitudini altitudo mẽſoris



addenda eſt, quæ ſi ſit 4 pedum, tota altitudo erit 254 pedum. Et hic modus à ſuperiore diſtat ſolo radii ſitu. *Itaque*

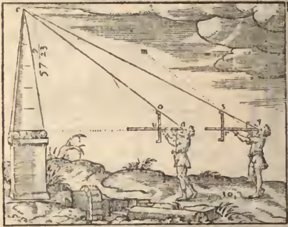
Si viſus ſit ab initio indicis recti per pinnas tranſverſarii in terminos notæ partis, erit ut intervallum pinnarum ad reliquum ſupereminentis tranſverſarii, ſic nota pars ad reliquam.

Conſectarium eſt de altitudinis nota parte, unde reliquũ cognoſcatur, ut in diagrammate. Sicut *ou* ad *uy*, ſic *ei* ad *is*. Nam ut *ou* ad *ua*, ſic *ei* ad *ia* per 9 e 7: & ut *ua* ad *uy*, ſic *ia* ad *is*, & ex æquo: ut *ou* ad *uy*, ſic *ei* ad *is*. Hic habes terminos tres proportionis. Sit igitur *ou* 20 partium, *uy* 30, nota pars *ei* 15 pedum: Cõcludes pro reliquo *is*



Dimenſio altitudinis prima ſecundaque ſic eſt, tertia ſequitur.

12. *Si viſus ſit ab initio indicis recti, erit ut in indice differentia ſegmenti ad differentiam diſtantiæ, ſic ſegmentum tranſverſarii ad altitudinem.*



Huc revocatur ſubtilitas quæ fuit in tertia geodæſia longitudinis: prima itaque collimatio ſit ab *a* initio indicis perpendicularis, & é longitudine ignota *ai* per *o* terminum tranſverſarii in *e* metam altitudinis *ei*: & ſegmentum indicis *ua*: ſecunda collimatio ſit ab *y* initio ejuſdem indicis & é majore diſtantia per *s* terminum tranſverſarii in eandem metam *e*: & ſegmentum indicis *rl*. Hic ut antea peracta dimenſio eſt, ſumpta differentia ipſius *yr* ſupra *au*, demonſtratio jam (ut antea) concludetur. Parallela *lsm* contra *aoe* erigatur. Hic primum triangula *oua* & *srl* æquilatera ſunt per 2 e 7, cum anguli ad *a* & *l* exterior & interior æquales æquentur baſi *ou* & *sr*, ſegmentum tranſverſarii in utraque diſtantia idem manet. Itaque *ua* æquatur *rl*. Jam reliquum ſorite quatuor graduum concluditur, ut *yr* ad *yu*, ſic per 9 e 7 *sr* id eſt *ou* ad *ei*, & ut *ou* ad *ei*, ſic *alu* id eſt *lr* ad *ai*. Itaque reliqua *yl* ad reliquam *ya* erit ut tota *yr* ad totam *yi*, ideoque de primo ad ultimum, ſicut *sr* ad *ei*. Differentia itaque indicis eſto 23, differentia diſtantiæ 30 pedum, ſegmentum tranſverſarii 44: altitudo erit pedum. $57\frac{2}{23}$

Itaque é geodæſia altitudinis patet differentia duarum altitudinum.

Nam cum utramque ſumpſeris per aliquem antecedentium modorum, tolle minorem é majore. Hinc igitur inæqualium turrium altera, alterius altitudinem licet metiri. Primo ex minore ſumatur longitudo per primum modum, quia altitudo minoris (in qua es) facilis eſt vel perpendiculo vel modo aliquo ſuperiorum, tum metire altitudinem, quæ ſupra minorem eſt, & adde minori, habebis totius altitudinem per primum aut ſecundum modum. figura ſic

eſt, & de-



eſt, & demonſtratur per 9 e 7. ut enim *ae* ad *ei*, ſic *ao* ad *ou*. Contra é majore licet metiri minorem. Si viſus primum á vertice majoris deinde á baſi, vel medio loco per pinnã tranſverſarii, ſit in verticem minoris altitudinis, erit ut ſunt dictæ partes indicũ ad partes primi indicis, ſic altitudo intra ſtationes ad ſuum exceſſum ſupra quæſitam altitudinem. Sunto enim partes indicũ 12 & 6, ſummaque 18 ad 12: ſic altitudo *uy* 190 pedum ad exceſſum 12$\frac{2}{3}$ pedum. Reliquum igitur 83$\frac{1}{3}$ erit altitudo quæſita *as*. Licet vero & é vertice turris metiri diſtãtiam turrium inter ſe: primus enim modus eſt metiendæ longitudinis, neq; quicquã hic differt, niſi quod radius extra datã altitudinẽ ſuſpenditur. figura ſic eſt, & demonſtratio eſt per 9 e 7: ut enim eſt *ae* ſegmẽtum indicis ad *ei* ſegmentum trãſverſarii, ſic eſt data altitudo *ao* ad longitudinem *ou*. Ergo altitudinis geodęſia ſic eſt, ubi data eſt longitudo uel pars altitudinis, ut in primo & ſecundo modo, vel ubi duplex eſt diſtantia, ut in tertio.



13. *Si vi-*

13. *Si viſus ſit ab initio indicis recti per pinnas tranſverſarii in terminos latitudinis, erit ut in indice differentia ſegmenti ad differentiam diſtantiæ, ſic intervallum pinnarum ad latitudinem.*

Supereſt geodæſia latitudinis, id eſt trāſverſæ lineæ rectæ. figura & demonſtratio ſic eſt. Prima collimatio ſit *a e i* per *o* & *u* pinnas transverſarii *o u*: ſecunda ſit *y e i* per *s* & *r* pinnas tranſverſarii *s r*: tum parallela per punctum *s*, ducatur *l s m* contra *a o e*.



Hic primum triangula *o u a* & *s i l* æquilatera ſunt per 2 e 7, quia anguli *u a o* & *j l s* exterior & interior æquales æquātur baſi *o u* & *s j* per theſin. quia hic ſegmentum tranſverſarii idem manet. Itaq; *u a* æquatur ipſi *j l*. His poſitis redit fere demonſtratio tertiæ altitudinis: ut enim *y l* eſt ad *y a*, ſic eſt *s j* ad *e u*, & quia partes multiplicātibus ſunt proportionales, ſic *s r* eſt ad *e i*. Cætera enim cōveniunt. Eadem geodæſia fuerit ſi è loco ſupero metiare ſubjectam latitudinem, ut in poſtremo exēplo. Atqui è diſtantia duorum locorum, id eſt è latitudine, ut arborum, montium, urbium, magna geographis & chorographis adjumenta comparantur. Quamobrem geodæſia re



ctarum



ctarū linearum ejuſmodi eſt in longitudine, altitudine, latitudine, unde pictor architectus, coſmographus loci cujuſlibet inſignis feneſtras, ſtatuas, pyramides, ſigna, denique lõgitudinem & altitudinem dimenſione ſimplici aut duplici, latitudinem tantum duplici, id eſt locorum omnium naturam ſymmetriamq; perſpiciet. Ut in ſubjecto exemplo liceat experiri.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. X.

de triangulato & parallelogrammo.

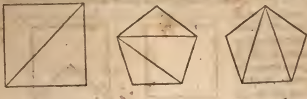
Atque hæc de geodæſia linearum rectarum é triangulis rectangulis, ſequitur de triangulato.

1. *Triangulatum eſt rectilineum compoſitum é triangulis.*

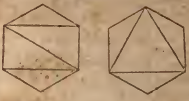
Antea (ut dichotomia ſervaretur) é linea factum eſt lineatum ad ſignificandum genus ſuperficiei & corporis, ita modo fit eadem de cauſſa é triangulo triangulatum ad exponendum genus quadrilateri & multilateri, & quidem juſtius etiam, quam antea in lineato. Triangula enim triangulatum componunt, non autem lineæ lineatum. Itaque

1. *Triangulati latera ſunt binario plura triangulis.*

Ut quadranguli latera ſunt 4, triangula ipſum quadrilaterum componentia 2: Quinquanguli latera 5, triangula 3. Sexanguli latera, 6 triangula 4, & ſic deinceps, ut hic. & quidem minimum illud eſt.



Poteſt enim vel triangulum ſecari in triangula quamlibet multa. Quod autem angulis rectis interiores atque exteriores æquentur in quolibet rectilinei genere, patuit 4 e 6: interiores in quadrangulo æquantur 4, in quinquangulo 6, in ſexangulo 8, & ſic deinceps: Exteriores autem in quolibet rectilineo æquantur 4 rectis: ut hic demonſtrari poteſt per 1 e 8 e 5, & per 9 e 6. Et

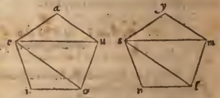


2. *Triangulata homogenea ſecantur in triangula æqua numero. é 20 p 6.*

Nam ſi quadrangula ſint, ſecantur in bina, ſi quinquangula in terna, ſi ſexangula in quaterna, & ſic deinceps.

2. *Triangulata ſimilia ſecantur in triangula ſimilia inter ſe & homologa totis. é 20 p 6.*

Ut in his quinquangulis. Primum particularia triangula ſunt ſimilia inter ſe. Nam *aeu* & *ysm* æqualium angulorum crura ſunt proportionalia ex theſi. Itaque triangula ipſa æquiangula ſunt per 9 e 7. Ideoque ſimilia per 9 e 7. Atque ita de reliquis: media vero detractis æqualibus angulis, reliquos æquales angulos habebunt, ideoque æquiangula erunt & ſimilia per idem. Secundo triangula *aeu* & *ysm*, *eio* & *srl*, *eou* & *slm*, nempe ſimilia inter ſe, ſunt per 1 e 6 in duplicata ratione homologorum laterum *eu*, *sm*, *eo*, *sl*, quæ ratio eſt eadem propter communia latera: Itaque terna triangula ſunt in eadem ratione, ideoque proportionalia, & per tertiam compoſitionem, ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ſic totum quinquangulum ad totum.

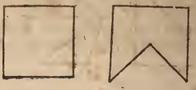


3. *Triangulum eſt quadrangulum aut multangulum.*

Partitionis hujus partes in Euclide ſunt, ſine tamen partitionis ulla ſpecie, & ab angulis ſpecies hic item nominantur, ut ante, quamvis à lateribus eſſet verius, ut quadrilaterum aut multilaterum, ſed uſus in verbis ſequendus eſt.

4. *Quadrangulum quod comprehenditur á quatuor lineis rectis. 22 d 1.*

Ut hic. Poteſt vero & quadrãgulũ eſſe ſphæricum & conicum & cylindraceum, & differẽtias illas cõmunes eſſe prædiximus. Et quadrangulum poteſt eſſe



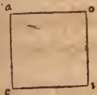
planum,

planum, quod non ſit quadrilaterum, ut hic: ſed tamen quadrangulum pro quadrilatero intelligatur é ſua definitione.

5. *Quadrangulum eſt parallelogrammum aut trapezium.*

Partitio autem ſuis item partibus in elementis eſt ſine partitionis forma: ſed differentia partium commodius ita diſtinguetur, quia parallelogramma in univerſum communia multa ſunt.

6. *Parallelogrammum eſt quadrangulum lateribus oppoſitis parallelum.*

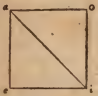


utin exẽplo *ae* latus eſt parallelũ lateri *io* & *ei* latus eſt parallelum oppoſito lateri *ao*. Hæc definitio ab Euclide in definitionum catalogo prætcrita eſt, & ex ea facta eſt 33 & 34 p 1. Attamen ſic ad 36 p 1 ad 4 & 10 p 6 parallelogrammi definitio aſſumitur ab Euclide. *Itaque*

1. Si rectæ eadem parte conterminent æquales & parallelas, parallelogrammum conſtituent.

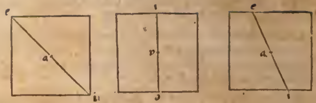
Quia ipſæ æquales erunt & parallelę, per 5 c 12 e 5. *Et*

2. Parallelogrammum oppoſitis & lateribus & angulis & ſectis diametro ſegmentis æquatur.



Utin *aeio* oppoſita latera æquantur per 5 c 12 e 5, quia duæ rectæ cõterminant ęquales parallelas. De angulis diagonius *ai* oſtẽdit: facit enim triangula *aei* & *ioa* æquilatera, ideoque æquiangula, cumque particulares anguli ad *a* & *i* ſint æquales, totus toti æquatur. Hæc vero pars eſt 34 p 1. Segmenta vero ſemper æqualia ſunt, ſive triangula ſint, ſive quadrangula quælibet,

libet, ut in ſubjectis figuris. Diameter enim biſecat parallelogrãmum per angulos, aut per latera biſecta, aut per altera laterum ſegmenta æqualia.



Et

3. *Diameter parallelogrammi biſecatur radiis æqualibus.*

Ut in tribus ſupra figuris *a e i* id etiam cum circulo commune eſt, ut patuit 17 c 4. Et

4. *Parallelogrammum eſt duplum baſi & altitudine æqualis.* 41 p 1.

Sequitur cõparatio primum in ratione æqualitatis parallelogrammi cũ triangulo: Ut vides in diagrammate.



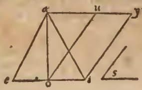
Nam parallelogrammum biſecatur diametro in duo triangula per antecedentem. Itaque duplum eſt dimidii. Et

5. *Aequatur triangulo æquealto, baſique duplo.* é 42 p 1.

Ut *e i* triangulo æquatur parallelogrammum *a o i u*, quia dimidium parallelogrammi æquatur triangulo. Itaq; dimidiis æqualibus tota erunt æqualia.



unde licet dato triangulo in dato angulo rectilineo parallelogrammum æquale conſtituere: ut hic dato triangulo *a e i* in dato angulo *s*, licebit



æquare

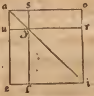
æquare parallelogrammum *o u y i*.

7. *Parallelogrammum conſtat é binis & diagonalibus & complementis, & gnomonibus.*

Hæ ſiquidem tres partes in geometricis rebus frequenter uſurpantur, & ideo definiendæ fuerunt.

8. *Diagonale eſt particulare parallelogrammum communis anguli & diagonii cum toto parallelogrammo.*

Primo definitur diagonale: ut in toto parallelogrammo *a e i o*, diagonalia ſunt *a u y s*, *u t y l r*, quia ſunt partes totius cõmunis & anguli ad *a* & *i* & diagonii *a i* cum toto: non quod tota diagonius ſit communis, ſed quod particulares diagonii ſunt partes totius diagonii.



Itaque diagonalia duo ſunt. Hæc definitio diagonalis confuſa eſt ab Euclide 24 & 26 p 6, ubi etiam τὰ περὶ διάμετρον παραλληλόγραμμα, quæ circa diametrum parallelogramma deſcribit, quæ nos diagonalia uno nomine nominamus.

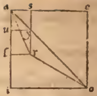
9. *Diagonale eſt toti ſimile ſimiliterque ſitum é. 24 p 6.*

Diagonalis nulla ratio vel proportio proponitur, ſimilitudo tantum proponitur, ut in eadem figura diagonale *a u y s* ſimile eſt toti. Primo eſt æquiangulũ. Nam angulus ad *a* communis eſt, eique æqualis qui ad *y*, ideoque etiam æqualis oppoſito ad *i* per 3 c 5 e. Tum anguli *a u y* & *a s y* æquantur per 12 e 5 angulis oppoſitis interioribus ad *e* & *o*. Itaque æquiangulum. Eſt item proportionale cruribus æqualium angulorũ. Nam triangula *a u y* & *a e i* ſunt ſimilia per 9 e 7, quia *u y* parallela baſi. Itaque ut *a u* ad *u y*, ſic *a e* ad *e i*, tum ut *u y* ad *y a*, ſic *e i* ad *i a*. Item per 12 e 5, quia *s y* eſt parallela baſi *i o*, ut *a y* ad *y s*, ſic *a i* ad *i o*. Ergo æquiordinate ut *u y* ad *y s*, ſic *e i* ad *i o*: item ut *s y* ad *y a*, ſic *o i* ad *i a*: & ut *y a* ad *a s*, ſic *i a* ad *a o*. Itaque æquiordinate, ut *y s* ad *s a*, ſic *i o* ad *o a*. Denique ut *s a* ad *a y*, ſic *o a* ad *a i*, & ut *a y* ad *a u*, ſic *a i* ad *a e*. Itaque æquiordinate ut *s a* ad *a u*, ſic *o a* ad *a e*. Quare diagonale *s u* eſt proportionale cruribus æqualium angulorum toti parallelogrammo *o e*. Demonſtratio eadem fuerit, de diagonali *r l*. Similis autem ſitus patet per 2 c 14 e 4. Atque hinc etiam patet diagonale quadrati quadratum, oblongi oblongum, rhombi rhombum, rhomboidis rhomboides eſſe, quia toti ſimile ſimiliterque ſitum. Diagonalia vero cum ſimilia ſint toti & ſimiliter ſita, erunt item ſimilia inter ſe & ſimiliter ſita, per 3 c 14 e 4. Itaque

Si particulare parallelogrammum eſt toti coangulum, & ſimile ſimiliterque ſitum, eſt diagonale. 26 p 6.

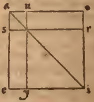
Aſſumi hoc potuit, ſed etiam ut ab Euclide cogi poteſt, alioqui totum æqua-

retur parti, ut toti parallelogrammo *aeio* particulare *auys* ſit coangulum, & communis anguli ad *a* ſimile toti ſimiliterque ſitũ: dico eſſe diagonale. Secus eſto diverſa diagonius *uro* ſit parallela *rl* contra *ae*. Itaque *alrs* erit diagonale per 6 e. Jam igitur per 8 e ut *ea* ad *ai*, ſic *sa* ad *al*: item ex theſi ut *ea* ad *ai*, ſic *sa* ad *au*: Itaque eadem *sa* ad *al* & *au* proportionalis eſt, & *al* æquatur ipſi *au*, totum parti.



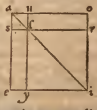
10. *Complementum eſt particulare parallelogrammum á conterminis diagonalium lateribus comprehenſum.*

Ut in figura *ur* & *sy*, utrumque enim comprehenſum eſt continuatis duorum diagonalium lateribus, & ideo complementa dicuntur, quía cum diagonalibus totum parallelogrammum complent. Neque vero diagònalia duo deſcribi poſſunt, quin una complemẽta deſcríbantur. Euclides nunquam complementum definít, ſed 43 p 1 appellat τὰ τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων παραπληρώματα. Complementa parallelogrammorum circa diametrũ, tanquam complementa diagonalibus reliqua ſint ad complendum totum parallelogrammum.



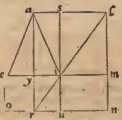
11. *Complementa ſunt æqualia.* 43 *p* 1.

Complementorũ nulla proportio, nulla ſimilitudo proponitur, ſed ratio tantum, ut in figura *ur* & *sy* cõplementa ſunt æqualia. Nam triangula *aei* & *aoi* æquantur per 3 c 5 e: item *asl* & *aul*, item *lyi* & *lri*. Itaque ſi triangula utrinque æqualia detraxeris ab æqualibus, relinques æqualia complementa.



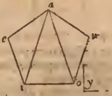
1. *Si complementum alterum æquatur dato triangulo in dato angulo rectilineo, reliquum ad datam rectam comparatum eidem pariter æquabitur.* 4 4 *p* 1.

Ut ſi poſtules parallelogrammum ad datam rectam, & in dato angulo rectilineo æ-

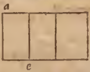


neo æquale dato triangulo, propoſitio ſatisfaciet. Sit triangulum *aei*, & datus angulus *o* data recta *iu*, & parallelogrã-mum *ayis* æquale triangulo in dato angulo per 5 c 6 e, tum latus *ay* æqualiter ipſi datæ *iu* continuetur in *r*, & connectatur *ru* & ab *r* diagonius concurrat cum *as* infinita, idque in *l* per c 11 e 5, lateraque *yi* & *ru* continuentur æqualiter ipſi *sl* in *m* & *n*, & connectatur *l n*. Hoc complementum *mu* æquatur complemento *ys* æquanti datum triangulum per præcedentem, & in dato angulo rectilineo. Et

2. *Si parallelogramma continenter æquentur triangulis dati triangulati in dato angulo rectilineo, totum parallelogrammum toti triangulato pariter æquabitur.* 45 p 1.



Eſt conſectarium ſuperioris de ratione parallelogrammi cum triangulato, neque demonſtrationem præterea ullam requirit, ſed manum promptam in deſcribendo. Rectam vero tibi ſumes infinitam, ad quam continues particularia parallelogramma, ut ſi detur triangulatum *aeio u* ſolvetur in tria triangula *aei*, *aio*, *aou*, & angulus ſit *y*, primum in dato angulo ad rectam infinitam facies per antecedentem parallelogrammum *ae* in dato angulo æquale primo triangulo. Deinde ſecundum triangulum ita deſcribes ſuper infinitã, ut crus alterum incidat in latus complementi æqualis, reliquum in antecedẽtia rejiciatur, & ſic deinceps.



Hic habes complementa tria cõtinuata, & parallelogrammum continuantia, ſed præſtat in fabricando delere antecedentia, & altera inferiorum diagonalium latera, ne quid interea cõfuſio linearum officiat. Itaque

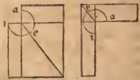
Parallelogrammum æquatur ſuis diagonalibus & complementis.

12. *Gnomo eſt alterum diagonale cum duobus complementis.*

2 d 2.

Gnomo duplex eſt in duobus exemplis, & ſic Euclides definit. Omnis parallelogrammi ſpatii circa diametrum ipſius parallelogrammum quodlibet cum duobus complementis gnomo vocetur. Itaque gnomo componitur ex utroque ge-

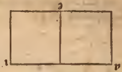
que genere diagonaliū & complemētorum. Gnomonis autem uſus in elemen-



tis nullus alius videtur quam ut uno nomine tres partes parallelogrammi ſi-gnificentur,& tribus literis appellentur, ut hic *aei*. Alioqui gnomō eſt perpendiculum, & ſic Oenopides (ut ait Proclus 12 p 1) perpendiculum dicebat pro gnomone more antiquo.

13. *Parallelogramma æquealta ſunt ut baſes. 1 p 6.*

Ut patet per 12 e 4. Quia ſunt dupla tri-



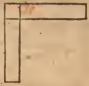
angulorum per 2 e 5 e figurarum primarum: Ut *ae* & *ei*. Itaque

Parallelogramma æquealta in æquali baſi ſunt æqualia. 35. 36 p 1.

Ut patet in eodem exemplo.

14. *Si parallelogramma æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, ſunt æqualia: & contra, 15 p 6.*

Conſectarium eſt ex 8 e 7. Ut hic vides, & tamen & illud (ut dictum eſt) & hoc conſectariū



potius eſt 13 e 4, quod hic etiam manifeſtius eſt. Itaque

1. *Si quatuor rectæ ſunt proportionales, parallelogrammum mediarum æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum. è 16 p 6.*

Erunt enim parallelogramma æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli. Et

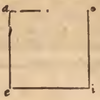
2. *Si tres rectæ ſint proportionales, parallelogrammum mediæ æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum.*

Conſectarium eſt è proximo.

Parallelogrammum eſt rectangulum aut obliquangulum.

Adhuc de parallelogrammis communia & generalia præceſſerunt: ſpecialia ſequuntur in rectangulis & obliquangulis, quæ differentia (ut prædixi) eſt communis triangulis & triangulatis, ſed hic nulla verbis ſaltem aptior ad genera propoſita diſtinguendum.

2. *Rectangulum eſt parallelogrammum quod habet omnes angulos rectos.*



Ut in *aeio*. Atque hinc intelligis ex uno angulo recto omnes rectos eſſe. Angulus enim ad *a* rectus oppoſito ad *i* æquatur per 2 e 6 e 10: ideoque ambo recti per e 8 e 3. Reliqui anguli ad *e* & *o* per 4 e 6 æquales duobus rectis, & æquales inter ſe per 2 e 6 e 10. Itaque ſinguli recti. Neque omnino in parallelogrammo rectus angulus eſſe poteſt, quin omnes recti ſint.

Itaque

1. *Rectangulum comprehenditur á duabus rectis angulum rectum comprehendentibus.* 1 d 2.

Hæc Euclidis definitio comprehenſionis verbo geometricam multiplicationem quandam ſignificat: ut enim è duobus numeris inter ſe multiplicatis fit numerus, ſic é duobus lateribus in ſe ductis fit rectangulum, nec tamen rectangulum quodlibet eſt rationale, ut antea patuit 9 e 4, & poſtea patebit 5 e.

Et

2. *Rectangula quatuor complent locum.*

Neque omnino intereſt, æqualia, inæqualia, æquilatera, inæquilatera, homogenea, heterogenea ſint quatuor. Quoquomodo enim verſentur, anguli recti erunt: ideoque complebunt locū. Neque hic Ariſtotelis τετράγωνον accipere poſſumus, niſi rectangulum generaliter intelligat.

3. *Si diameter biſecat latus rectanguli, recte ſecat: & contra.*



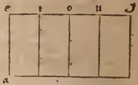
Ut hic patet per 1 e 7 ductis diagoniis biſegmentorum: cōverſa patet per 2 e 7, & 10 e 6.

Itaque

Si inſcripta recta biſecat latus rectanguli eſt diameter. Quia biſecat parallelogrammũ.

4. *Rectangulum æquatur rectangulis ex ipſius uno latere & reliqui ſegmentis.* 1 p 2.

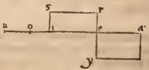
Ut hic rectangula quatuor particularia toti æquantur, quæ fiunt ex *a e* uno ipſius latere, & ſegmentis reliqui *e i, i o, o u, u y*, cujus demonſtratio è congruentia eſt, quia totum partibus congruit. Sed eadem ratio in numeris clarior eſt inductione partium, ut quater octona, ſunt 32, frango 8 in 5 & 3, quater quina ſunt 20, & quater terna 12,



totum eſt 32, deniq; tota arithmetica multiplicatio ex totis numeris idem facit ac multiplicatio totius per alterius partes, imo partium per partes. Hæc propoſitio appellatur 9 cap. 1 conſtr. à Ptolemæo.

5. *Si quatuor rectæ ſint proportionales, rectangulum mediarum æquatur rectangulo extremarum.* 16 p 6.

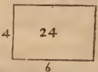
Eſt è 1 c 14 e 10, ſed frequẽter ſpeciale cõſectariũ hoc appellatur nomine rectanguli. Ut



hic ſunt quatuor proportionales *a e, e i, i o, o u*, & ab extremis *a y* rectangulum, è mediis ſit *s e*.

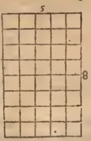
6. *Figuratus rectanguli rationalis appellatur planus.* 16 d 7.

Figura rationalis definita eſt 9 e 4, qualis è rectilineis adhuc nulla fuit, prima eſt parallelogrammum rectangulum neque quodlibet, ſed illud ſolum, cujus baſis altitudini eſt rationalis, ratioque baſis & altitudinis explicabilis eſt numero, ubi & figuratus definitus eſt. Rectangulum aũt ex irrationalibus lateribus, qualia 8 e 1 dicta ſunt, eſt irrationale. Rationale itaque rectangulum è rationalibus lateribus accipitur, & ejus figuratus nomine generis appellatur planus, quia è toto planorum genere hæc ſola ſpecies eſt rationalis. Si igitur rectanguli baſis eſt 6, altitudo 4, area eſt 24, & ſi conſtet aream eſſe 24, & baſim 6 eſſe, con-



ſtabit altitudinem eſſe 4: exemplum ſic eſt. Atque hæc multiplicatio ut patuit ad c 9 e 4 geometrica eſt, ut ſi multiplices 5 per 8, facis 40 planum, & latera plani ſunt

ni ſunt 5 & 8, tanquam feciſſes parallelogrammum rectangulum pedum quadratorum 40, cujus baſis eſſet 5 pedum, altitudo 8, hoc modo: hæc inquam muplicatio eſt geometrica, nec ex lineis lineæ, ut illic ex unitatibus unitates, ſed intervallo uno ſuperior magnitudo creatur, ſuperficies nempe. Hinc etiam patet geodæſia rectanguli trianguli.



Nam cum crura recti anguli inter ſe multiplicaveris, facis totum parallelogrammum rectangulum, cujus dimidium eſt triangulum per 3 c 6 e 10.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XII. de quadrato.

R*ectangulum eſt quadratum vel oblongum.*

Hæc partitio fit verbis propriis, at res & differentia ſubjecta eſt communis ex angulis & lateribus.

2. *Quadratum eſt rectangulum æquilaterum.* 30 d 1.

Ut hic vides *a e i o*. Quadratum itaque cum ſit æquilaterũ, & rectis æqualibus æquiangulũ, é quadrangulis erit ordinatum. Latine vero diſtinctius quadratũ dicitur quã græce



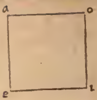
τετράγωνον id eſt quadrangulum, quod generale & quadrilateris omnibus commune. Itaque

1. *Latera quadratorum æqualium ſunt æqualia.* Et

2. *Potentia rectæ eſt quadratum.*

Δύναμιν potentia verbum eſt Euclidi libro decimo uſitatum. Dicitur autem linea recta poſſe quadratum, quia in ſe ipſam ducta facit quadratum. Potentia porro iſta ut Ariſtoteles ait 5 & 9 phil. dicitur *κατὰ μεταφοράν*. Et

3. *Si duæ conterminæ perpendiculares æquales claudantur parallelis, conſtituent quadratum.* 46 p 1.



Ut in *aeio* perpendiculares *ao* & *ei* æquales claudantur parallelis *ao*, contra *ei* & *oi* contra *ie* conſtituent quadratum *aeio*. Parallelogrammum enim eſt ex theſi, quia oppoſita latera parallela, & rectangulum, quia cum angulus perpendicularium *aei* ſit rectus, omnes recti erunt per 2 e 11. Deinde unum latus *ei* æquatur omnibus, primum oppoſito *ao* per 6 e 10, & ipſi *ea* per theſin, ideoque oppoſito *oi* per 6 e 10.

3. *Planus quadrati eſt planus æquilaterus.*

Eſt 18 d 7 paulo ſecus expoſita. Quadratus numerus eſt, qui eſt æqualiter æqualis, vel qui comprehenditur à duobus æqualibus numeris. Eſt vero quadratum ex omnibus planis imprimis rationale, non tamen ſemper, ſed tantū rationale eſt cujus numerus eſt quadratus. Itaque quadrata numerorum non quadratorum non ſunt rationalia. Itaque

Fit á numero in ſe ipſum multiplicato.

Quales quadrati ſunt primi novem 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. à ſemel uno, bis binis, ter ternis, quater quaternis, quinquies quinis, ſexies ſenis, ſepties ſeptenis, octies octenis, novies novenis. Atque hæc ſumma eſt quadrati numeri geneſis & inventio per multiplicationem è dato latere. ſed eadem inventio ſubtilius multiſque elementis ab Euclide proponitur, à quo ſi cui hinc utilitas ulla ſperetur, licebit repetere. ſequitur varia comparatio quadrati cum rectangulo, cum quadrato, cum rectangulo ſimul & quadrato. Ratio cum rectangulo primum eſt.

4. *Si tres rectæ ſunt proportionales, quadratum mediæ æquatur rectangulo extremarum: & contra. 17 p 6 & 20 p 7.*

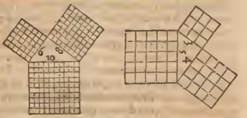


Conſectariolū eſt è 2 e 14 e 10: Ut in *ae*, *ei*, *io*. Cōſectarium item hoc quadrati nomine infinite citatur, ut ſuperius illud de rectangulo.

5. *Si baſis trianguli ſubtendit rectum, æque poteſt cruribus: & contra. 47 & 48 p 1.*

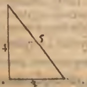
Comparatio quadrati deinceps eſt cum quadrato, primum ratio eſt æqualitatis.

litatis ė 5 e 8, conſectarium quidem, ſed tamen conſectarium mirifice celebrantem à Pythagoreis, tanquam mater hjuus nondum nata & inventa eſſet. Et cõſectarium infinite quadrati nomine citatum præ generali: ut permirum ſit filiæ & parentem & honorem tantopere celebrari, matris autem parentem & honorem ſilentio ſepeliri. De Pythagorea exultatione dictum eſt in proœmio mathematico. Atqui conſectariũ hoc aliquando rationale numeroq; explicabile, ſed in triangulo vario tantum. Nam trianguli rectanguli æquicruri latera ſunt irrationalia: varii autem aliquando rationalia, & quidem modo duplici, altero Pythagoræ, altero Platonis, ut Proclus author eſt ad 47 p 1. Pythagorea ratio ſic eſt ex impari numero.



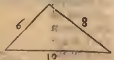
1. *Si quadratus imparis pro crure primo dati minuatur unitate, dimidius reliqui erit crus alterum, auctus unitate erit baſis.*

Ut in exemplo laterũ 3. 4. 5. Quadratus baſis 5 eſt 25 æqualis quadratis 16 & 9 è cruribus 4 & 3. Pythagorei vero in hac invẽtione ſibi præcipue placuerunt, eaque de cauſſã 5 invictus numerus ab iis dicebatur, tanquã baſis illa victrix eſſet, crura vero debellata, ut Alexander ait primo philoſophiæ. Platonica ſic eſt è numero pari.



2. *Si dimidius paris pro crure primo dati quadretur, quadratus minutus unitate erit crus alterum, auctus unitate erit baſis.*

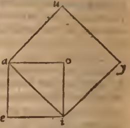
Ut in exemplo laterum 6.8.10. Nam baſis 10 quadratus 100 æquatur quadratis 36 & 64 è cruribus 6 & 8. Ex hac ratione rationalium potentiarum (ut Vitruvius ait lib. 9 cap 2) normam exactiſsimam fabricari Pythagoras docuit tribus regulis in trianguli ſpeciem compoſitis, quæ ſunt ut 3. 4. 5. Hinc architectura in ſcalarum partibus arithmeticam proportionem didicit. Ea namque ratio quemadmodum in multis rebus & mẽſuris eſt utilis etiam in ædificiis, ſcalarũ ædificationibus, ubi tẽperatas habeant graduum librationes, eſt expedita. Sic enim altitudo contignationis ab ſumma coaxatione ad imum libramentum diviſa fuerit in partes tres, erit earum quinque in ſcalis ſcalporum juſta longitudinis inclinatio. Nam quam magnæ fuerint inter contignationem & imum libramentum



bramentum altitudinis partes tres, quatuor à perpendiculo recedant, & ibi collocentur interiores calces ſcalporum. Ita enim erunt tẽperatæ graduum & ipſarum ſcalarum collocationes.

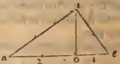
3. *Diagonius poteſt duplum lateris, eique eſt aſymmetra.*

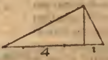
Ut hic vides. Primum quadratum eſto *aeio*, ex cujus diagonio *ai* fiat quadratum *aiuy*, erit duplum, cũ nempe diagonius poteſt æquale utrique cruri æquali. Ergo poteſt duplum alterius, & hæc via eſt duplicandi quadrati à Platone tradita, ait Vitruvius 1 cap 9 lib. quod tamen etiam duplicari, triplicari, omninoque etiam data ratione augeri poteſt per 1 c 1 5 e 4, ut illic prædictũ eſt. Quod autẽ diagonius ſit aſymmetra lateri eſt 116 p 10. Argumentum eſt quia daretur quadratus numerus duplus quadrati numeri. Quod Proclo 2 cap 2, Theonique & Campano ad 116 p 10 impoſsibile per ſe clarum viſum eſt. At illud clarius eſt in libello de lineis individuis Ariſtoteli attributo. Quia par eſſet impar. Nam ſi diagonius ſit 4 latus 3, quadratum diagonii 16 duplum erit ad quadratum lateris, & ita quadratum lateris erit 8, & idem erit 9 nempe ex 3, ſicque par eſſet impar. Hanc aſymmetriam Ariſtoteles frequẽter appellavit, ut illam de tribus angulis duos æquantibus. Huc addi poſsit illud ad 42 p 10. Segmenta rectæ varie ſectæ magis inæqualia majus poſſe.



6. *Si baſis trianguli rectanguli ſecatur á perpendiculari ex angulo recto dupla ratione, poteſt ſeſquialterum majoris cruris, triplum minoris: ſi quadrupla, ſeſquiquartum majoris, quintuplũ minoris. ad 13. 15. 16 p 13.*

Ut in *aei* baſis *ae* ſegmentum *ao* ſit duplũ ad ſegmentũ *oe*, nempe 2 ad 1. Id enim eſto ſecari dupla ratione, ut deinceps quadrupla, tota erit ſeſquialtera ad *ao*, ideoque per 3 c 4 e 8, & 1 c 15 e 4, quadratum ex *ae* ſeſquialterum ad quadratum ex *ai*, & eodem argumento triplum ad quadratum ex *ei*. Reliqua de quadrupla ſectione patent in ſubjecta figura ſimili argumento.



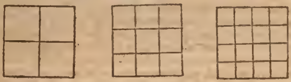


7. *Si recta eſt ſecta quodlibetfariam, poteſt multiplex ſegmenti cognomine quadrato numeri ſectionis.*

Sic

390

Sic biſecta poterit quadruplū dimidii cognomine quaternario, quadrato binarii ſecundum quem fit biſectio, ſic triſecta poterit nuncuplum trientis, quadriſecta ſedecuplum quadrantis: ut hic vides. Hoc Theoni poſtulatur in demōſtratione 18 p 13. Qualis progreſsio eſt in ſimilibus & planis & ſolidis in Eratoſthenis epiſtola ad Ptolemæum, é ratione homologorum laterum æquemultiplicata dimenſionibus.



8. *Si recta eſt ſecta in duo ſegmenta, quadratum totius æquatur quadratis ſegmentorum duplici rectangulo utriuſque.* 4 p 2.

Tertia ratio quadrati deinceps eſt cum duobus rectāgulis & duobus quadratis prim o æqualitatis. Conſectarium eſt é 3 c 11 e 10, quia parallelogrammum æquatur diagonalibus & complementis. Si recta *ae* ſecta ſit in *i* facit quadratum *aeuo* majus quam ſegmentorum *ai* & *ie* quadrata *uy* & *ye* duplici rectangulo *ay* & *yo*. Itaque



Latus primi diagonalis eſt latus alterius complementi, & duplicatum eſt latus ſimulutriuſque: reliquum autem latus ſimulutriuſque eſt latus reliqui diagonalis.

Hæc ratio eſt quadrati cum rectangulo & quadrato. Quadrati autem numero propoſiti latus ſæpe quæritur. Itaque per proximum elementum, & ejus conſectaria analyſis quadrati lateris inſtructa eſt. Quæratur igitur latus jam propoſiti quadrati, & geneſis ante ſpectetur, qualem hic é numerorum multiplicatione in numeris ipſis vides.

```
  10  2
  10  2
   2  4
   2  0
1  0  0
1  4  4
```

Hæc

Hæc ratio eſt quadrati cum rectangulo & quadrato, unde habetur analyſis quadrati lateris explicabilis numero. Eadem ſiquidem via eſt Thebis Athenas, quæ Athenis Thebas: Et hic geometricæ analyſeos uſus ſupereſt, ut poſtea in cubo, cum alius in totis elementis nullus ſit. Hic igitur primo notabis quadratos ſingulares ſiniſtrorſum ab ultima nota creſcentes locis imparibus, & deinceps uno intermiſſo deſinere, ſic 144, hæ notæ ſignificant quod ſingularia latera ſint colligenda, ut univerſum latus compleatur. Deinde quod primis exemplis notum eſt, quadrati maximi in primum punctum deſinentis, latus pro quoto adnota, & ipſum quadratum á numero in idem punctum deſinente ſubducito, latus erit 1, nec quicquam reſtabit, ſic 144 (1: hæc primi lateris ſingularis eſt inventio: Secundo duplica latus jam repertum, fient 2 & ſubjice ſequẽnti plano 4 ex duobus planis facto, quia latus eſt amborum planorum in unum compoſitorum, & per hoc latus divide totum planum, evenit 2 pro ſecundo quoto, reliquum nempe ejuſdem plani latus: quod quia latus eſt etiam quadrati ſequentis, ſubjicito ſequenti puncto tanquam diviſoris notam: facta multiplicatione dividentium notatum & factorum ſubductione nihil reſtabit. Sic erit exemplum totum.

1 4 4
1 2 2 (12
4 4

Quare hac numeratione diviſio plani ſola eſt cujus, etiam latus negligitur & tantum quæritur, quia quadrati ſequentis latus eſt. Quæratur latus 15129. Primo notato impares locos, ſic 15129. Deinde quadrati maximi in primum punctum deſinentis latus adnotato & lateris quadratum ſubducito, nihil reſtat. ſic

15129 (1
1

Secundo repertum latus 1, duplicatum ſubjicito plano ſequenti 5, & per illud dividito ipſum planum, eveniet 2, reliquum latus adnotandum in quoto ſecundo loco poſt jam repertum latus, & ſubjiciendum ſequenti puncto peracta factorum ſubductione, manebunt 7. ſic

7
15129 (12
12
44

Hæc ſecunda ſingularis lateris eſt inventio. Tertio reperta latera duplicentur velut unum, & unius præcedentis quadrati. Quamvis enim in univerſi quadrati la-

drati latere retexendo quadrati ſingularis duobus plures incidant: attamen duo tantum conſiderantur, & præcedentium omnium latera pro unius quadrati latere numerantur. Ergo reperta latera velut unum duplicentur, fient 24, & ſubjiciantur plano ſequenti 72, planus diviſus dabit 3, reliquum plani latus adnotandum tertio loco poſt reperta latera, & ſubjiciendum ſequenti puncto, facta ſubductione nihil reſtabit.

```
  7
15129 (123
  243
  729
```

Aliquando poſt quadratum jam repertum locis proximis, nec planus nec quadratus eſt ullus. Itaque latus ejus ſingulare erit 0: ut in quadrato 366025, latus univerſum eſt 605, ex tribus lateribus ſingularibus, quorum medium eſt 0. Aliquando etiam planus intermedius partem ſequentis quadrati continet. Itaque ſi latus reliquum majus ſit latere quadrati ſequentis æquandum eſt, ut quæratur latus quadrati 784, primi quadrati latus erit 2, & ſupererunt 3 ſic.

```
 3
784 (2
 4
```

Tum latus idem duplicatum ſubjiciatur plano ſequenti 38, planus diviſus daret 9 pro reliquo latere: at hoc latus majus eſſet latere ſequentis quadrati: minuatur igitur 1, & pro latere 9 ſumatur 8 latus, & adnotetur, ſequentiq; quadrato ſubjiciatur, facta ſubductione nihil manet.

```
 3
784
 48 (28
384
```

Atque hinc patet inventio medii proportionalis inter duos datos numeros, ſi quis tamen eſt. Nam ſi factus à duobus eſt quadratus, latus quadrati eſt medium inter datos, ut patet per auream regulam, ſi propoſitus numerus non eſt quadratus. Arithmeticum latus & numero explicabile nullum reperietur, & hic numerus figuratus eſt umbra figuræ geometricæ, nec aſſequitur, neque tale quadratum eſt rationale: Quadrati tamen in eo maximi numerabile latus inveniri poteſt: ut in 148, numerus quadratus 144 continetur, & latus ejus eſt

m 12, ſuper-

12, ſuperſunt vero 4. Latus igitur talis numeri non quadrati exactum nullum eſt, nec ullum unquam tam vero propinquum reperietur, quin vero propius poſſet inveniri. Itaque eſt inexplicabile numero. Duo hujuſce inventionis modi ſunt, alter per gnomonis additionem, alter per dati numeri non quadrati reductionem ad partes majoris alicujus nominis.

Si latus inventum duplicetur, & duplicato unitas addatur, totus erit gnomo proxime majoris quadrati.

Nam latus eſt complementū alterum, & duplicatum eſt ſimul utrumque, unitas autem eſt ultimum diagonale: Ut hic vides circumponi gnomonē quadrato priori, eamque differentiam eſſe quadrati majoris á minore, ubi Ariſtotelis gnomo additus quadrato auget, non mutat ſpeciem: quod perpetuo verum eſt, ſi majoris quadrati gnomo addatur proximo minori quadrato tanquam diagonali. Itaque ut gnomo habeatur pro reliquo nominatore duplicatur inventum latus pro duplicato complemento, & unitas additur pro diagonali. Sic latus numeri 148 eſt $12\frac{4}{25}$, cujus ratio pēdet ex eadem propoſitione, unde & latus integrum invenitur.



Cum enim latus unijuſcujuſque quadrati proximo minoris tantum diſtet unitate á latere proximo majoris quadrati, eadem unitas & bis in quadrati præcedentis latus & ſemel in ſeipſam ducta gnomonem majoris lateris quadrato adjicit: Nã quadratũ facit 169. Quo intelligitur quãtũ numerator 4 abeſt á nominatore 25, tantũ gradatũ 148 abeſſe á proximo majore quadrato. Nã ſi addas 21, quo abeſt 4 á 25 facies quadratũ 169, cujus latus eſt 13. Secũdus modus eſt per reductionem ad datas partes magni nominis, ut centeſimas, milleſimas, aut minutiores alias, & quidem quadratas, ut earum latus certum jam conſtet. Quanto autem minores fuerunt, tanto propius vero latus invenietur. Sit idem exemplum 148 reductum ad centeſimas quadratas $\frac{1480000}{10000}$ nominatoris latus eſt 100: numeratoris autem 1216, & ſuperſunt 1344, ſic $\frac{1216}{100}$ id eſt $12\frac{16}{100}$, vel $\frac{4}{25}$ quod primo etiam modo patebat. Sed in latere numeratoris præter 1216 ſuperſunt 1344, quo tantulo modus hic eſt accuratior priore: reliqua tamen iſta negliguntur, quia ne unam quidem centeſimam invento lateri poſſunt addere, neque enim $\frac{1344}{2432}$ faciunt unam centeſimam. Atque etiam in minoribus partibus ſecundus modus præter reliqua monſtrat latus aliquanto majus latere per primum modum reperto, ut in 7 latus eſt per primũ modum $2\frac{3}{5}$: At per ſecundum modum latus 7 reducti ad quadratas milleſimas, id eſt $\frac{7000000}{1000000}$ id eſt $\frac{2645}{1000}$ & ſuperſunt 3975. At $\frac{645}{1000}$ ſunt majores $\frac{3}{5}$. Nam $\frac{3}{5}$ reductæ ad 1000 ſunt $\frac{600}{1000}$ Itaque ſecundus modus in hoc exemplo ſuperat primum $\frac{45}{1000}$, neglectis etiam reliquis 3975. Ergo hæc analyſis eſt quadrati lateris é prima ratione quadrati duplici & rectangulo & quadrato æqualis.

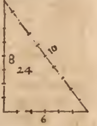
Triangu-

Trianguli Geodæſia.

Trianguli cujuſcunque geodæſia generalis una eſt apud Heronem laterum additione, ſubductione, multiplicatione, & quadrati lateris inventione hoc modo.

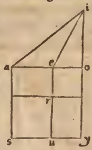
9. *Si de dimidio collectorum laterum dati trianguli latera ſigillatim ſubducantur, latus continue facti è dimidio & reliquis erit area trianguli.*

Ut latera trianguli *aei* collecta ſunt 24, dimidium 12, unde ſubductis lateribus 6.8.10, reliqua ſunt 6.4.2: jam fac continue primo 72 è 12 & 6, ſecundo 288 è 72 & 4: tertio 576 è 288 & 2. Latus cõtinue facti 576 eſt 24 area trianguli. Geodæſia iſta generalis facillima & expeditiſsima eſt, ſi latera integro numero numerẽtur, quamvis ſi cauſſam requiras ænigmati potius, quã theoremati germana ſit. Itaque demonſtratio ejus in Herone nulla eſt. Jordanus & Jordano poſteriores demõſtrare conati ſunt, ſed obſcure & per ſtereometriam, quam etiam continuatio multiplicationis è dimidio & reliquis in ipſo theoremate videtur indicare. Demonſtrationem itaque hanc rejecimus in ſcholas ad finem ultimi libri, ſi quis requirat. ſpecialis autem geodæſia trianguli rectanguli jam dicta eſt, ſed obliquanguli poſtea dicetur. Sed generalis longe præſtantior: Nam reductione obliquanguli multæ fraudes accidunt, ut lepido voto ardanus tantum Cagri optaſſe videatur quantum pſeudographia iſta deperiret.



10. *Si baſis trianguli ſubtendit obtuſum, plus poteſt cruribus duplici rectangulo alterius, & ex eo continuationis ad verticis perpendicularem.* 12 *p* 2.

Comparatio quadrati cum duobus item rectangulis & totidem quadratis eſt, ſed inæqualitatis. Ut in triangulo *aei* baſis *ai* quadratũ majus eſt, quam quadrata crurum *ae* & *ei* duplici rectangulo *ar*, quod fit ex altero crure *ae* & continuatione *eo*. Nam per 5 e quadratum ex *ai* æquatur quadratis ex *ao* & *oi* id eſt tribus quadratis, ex *io*, *oe*, *ea*, & duplici dicto rectangulo. At quadrata crurum *ae* & *ei* æquantur quadratis tribus illis ex *ae* nempe ſuo & ex *ei* duobus, primo *io*, ſecundo ex *oe* per 5 e. Itaque exceſſus reſtat duplicis rectanguli.

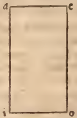


P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XIII.

de oblongo.

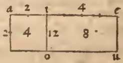
OBlongum eſt rectangulum inæquilaterum. 31 *d* 1.

Ut hic *a e i o*. Hæc rectanguli ſpecies ſecunda in elementis ad ſolam definitionẽ proprie nominatur ab Euclide. Ratio oblongorum copioſa eſt è datæ rectæ triplici ſectione rationali interdum & explicabili numero, prima ſectio eſt ut libet, id eſt in duo ſegmenta quælibet æqualia vel inæqualia: unde ratio quadruplex oritur.



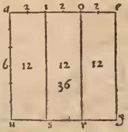
2. *Oblongum è tota & ſegmento æquatur rectangulo ſegmentorum, & prædicti ſegmenti quadrato.* 3 *p* 2.

Cõſectariũ eſt e 4 è 11. Rectangulũ enim ſegmentorũ & quadratũ ſunt ex altero latere & reliqui ſegmẽtis. Ut recta *a e* ſecta ſit in *a i* 2 & *i e* 4, rectangulũ 12 ex *a e* 6 & *a i* 2 æquatur rectangulo *i u* 8 è ſegmentis *a i* & *i e*, item quadrato *a o* 4 è prædicto ſegmento *a i*: rectangulum autem hic ideo proponitur, quia poteſt & quadratum eſſe, ſi linea nempe ſit biſecta. *Secundo.*



3. *Oblonga è tota & ſegmentis æquantur è tota quadrato.* 2 *p* 2.

Conſectarium item eſt è 4 e 11. ut recta *a e* 6 ſecta ſit in *a i* 2, *i o* 2, *o e* 2, oblonga 12 *a s*, 12 *i r*, 12 *o y*, è tota recta *a e*, illiſque ſegmentis æquãtur quadrato *a y* è tota:

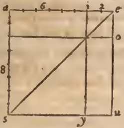


Hic ſegmenta duobus plura ſunt, & tamen à primo reliqua pro uno ſumi poſſunt, cum

ſunt, cum rectangulum particulare item ſit cum illis æquale. Hæc propoſitio adhibetur ad 6 e 18. *Tertio.*

4. *Oblonga duo è tota & ſegmento cum tertio quadrato reliqui ſegmenti æquantur quadratis totius & prædicti ſegmenti.* 7 p 2.

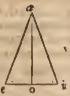
Ut recta ae 8 ſecta ſit in ai 6 & ie 2, oblonga ao & iuè tota & ſegmēto 2 ſunt 32: quadratum 8 è 6 reliquo ſegmento eſt 36, totumque 68, totus autem ae 8



quadratum eſt 64, & prædicti ſegmenti 2 eſt 4, ſummaque eadem 68.

5. *Baſis trianguli acutanguli minus poteſt cruribus duplici oblongo ex altero crure & ejus ſegmēto à dicto angulo ad verticis perpendicularem.* 13 p 2.

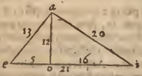
Ut in triangulo aei ſumatur angulus ad i acutus. Hic per 4 e oblonga duo ex ei & oi cum quadrato eo æquantur, quadratis ex ei & oi, commune addatur quadratum ex ao. Hic quadratum ex



ei cum quadratis ex io & oa, id eſt per 5 e 12 cum quadrato ex ia æquatur duobus oblongis ex ei & oi cum duobus quadratis ex eo & oa, id eſt per 5 e 12 cum quadrato ex ea. Itaque duo oblonga cum quadrato baſis æquantur quadratis crurum, vinciturque baſis à cruribus duobus oblongis. Atque hinc habetur perpendicularis in triangulo. *Itaque*

Si quadratum baſis acuti anguli tollatur è quadratis crurum, reliqui dimidio per crus diviſo, quotus erit ſegmentum dividentis à dicto angulo ad verticis perpendicularem.

Ut in triangulo acutangulo aei ſunto latera 13.20.21. & ae ſit baſis acuti, quadratum ejus erit 169, quadrata crurum ai & ei addita 841, & inde ſublato quadra-

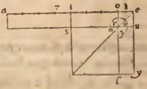


to 169 relinquuntur 672, dimidium 336, quo diviſo per 21 quotus erit 16, ſegmentum

mentum dividentis cruris *ei* ab angulo *aie* ad verticis perpendicularem *ao*: reliquum itaque ſegmentum erit 5: Jam de 169 quadrato baſis 13, tollatur 25 quadratum è minoris ſegmento 5, relinquentur 144 pro quadrato perpendicularis per 5 e 12. Hic inventa perpendicularis & latus ſectum latera ſunt rectanguli, cujus dimidium erit area trianguli, ut hic rectangulum è 21 & 12 erit 252, dimidium 126 erit area trianguli. Hoc Theon paulo tamen ſecus in 6 lib. magnæ cō ſtructionis: ſequitur ſecunda ſectio, unde quarta exiſtit ratio.

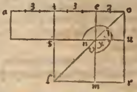
6. *Si recta eſt biſecta, ſecuſque oblongum inæqualium ſegmentorum cum quadrato interſegmenti æquatur quadrato biſegmenti.* 5 p 2.

Ut recta *ae* 8 ſit biſecta in *ai* 4, & *ie* 4, ſecuſque in *ao* 7 & *oe*, oblongum ex 7 & 1, cum 9 quadrato interſegmenti *io* 3 id eſt 16. æquatur 16 quadrato biſegmenti *ie* 4. Quod etiā geometrice patet completo diagrāmate. Nam *as* parallelogrammum ipſi *iu* parallelogrammo per 13 e 10 æquatur, & ideo per 11 e 10 ipſi *oy*. Nam complementis æqualibus commune eſt *ou*. Itaque ſi commune *so* addatur utrique, oblongum *ar* æquabitur gnomoni *mny*, quadratum autem interſegmenti eſt *sl*. Quare oblongum ſegmentorum inæqualium *ar*, cum quadrato interſegmenti *sl*, æquatur quadrato interſegmenti *iy*. Tertia ſectio deinceps eſt, unde quinta eſt ratio.



7. *Si recta eſt biſecta & continuata, oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato biſegmenti æquatur quadrato compoſitæ ex biſegmento & continuatione.* 6 p 2.

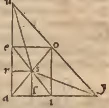
Ut recta *ae* 6 biſecta in *ai* 3 & *ie* 3 & continuata in *eo* 2, oblongum 16 ex 8 continuata & continuatione 2 cum 9 quadrato biſegmenti id eſt 25, æquatur quadrato 25 ex 3 biſegmento & continuatione 2 id eſt è 5: geometrica item concluſio hic fuerit, ut prius. Nam *as* per 13 e 10 æquatur ipſi *iy* & per 11 e 10 ipſi *yr* complemento: æqualibus addatur *so*, Jam oblongum *au* æquabitur gnomoni *nyu*. Denique æqualibus addatur quadratum biſegmenti. Oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato biſegmenti æquabitur quadrato compoſitæ è biſegmento & continuatione. Atque rationes hæ fuerunt oblongi cum rectangulo. Hinc exiſtit meſographus Heronis mechanici ſeu meſolabus dictus ab



inventione

inventione duarum continue mediarum proportionalium inter duas datas: unde exiſtit problema deliacum quod Apollinem ipſum exercuit. Meſographus autem Heronis eſt infinita regula, quæ ſiſtitur cochleato unco per cavum mobili, eſt vero ut Pappus ait initio libri tertii meſographus iſte architectis aptiſsimus, multoque promptior Platonis meſographo: meſographi mechanica eſt apud Eutocium ſecundi de ſphæra, ſed paulo facilius à nobis ita proponetur.

8. *Si duas datas rectas comprehendentes rectangulum, & infinite continuatas meſographus tangens oppoſitum angulum angulo datarum interſecet æquidiſtanter á centro, interſegmenta erunt media continue proportionalia datis.*



Ut datas rectas *ae* & *ai* comprehendentes rectangulum *ao* & continuatas meſographus *uy* tangens angulum *o* oppoſitum angulo datarum interſecet æquedistanter á centro. Centrum quidem concurſus diagoniorum *ao* & *ei* oſtendet in *s*: ad æquidiſtantiam autem á centro volvendus eſt meſographus, & adhibendus circinus, & hoc mechanicum nullo principio geometriæ certo adhuc inventum eſt, ut protinus actione prima æquidiſtantia deprehendatur. Sint igitur æquidiſtantiæ pūcta *u* & *y*. Dico interſegmenta eſſe media: utque *ae* eſt ad *iy*, ſic *iy* eſſe ad *eu*, ſic *eu* ad *ai*. Primum eſto á centro *s* perpendicularis *sr* in latus *ae* biſecabit latus *ae* per 3 e 11. Itaque per 7 e oblongum ex *au* & *ue*, cum quadrato *re* æquatur quadrato *ru*, aſſumptoque communi *rs* oblongum cum duobus quadratis *er* & *rs*, id eſt per 5 e 12 cum quadrato *se*, æquatur quadratis *ru* & *rs*, id eſt per 5 e 12 quadrato *su*. Simillimum eſt de oblongo ex *ay* & *yi*, ducta *sl* perpendiculari ut prius. Hoc enim oblongum cum quadratis *li* & *sl* id eſt per 5 e 12 cum quadrato *is* æquatur quadratis *yl* & *ls*, id eſt per 5 e 12 *ys*. Itaque oblonga æqualibus æqualia æquantur inter ſe, ſublatiſque utrinque æqualibus æqualium radiorum per 3 e 6 e 10 quadratis *se* & *si* relinquentur æqualia. Quare per 14 e 10 laterum æqualium rectangulorum ſunt reciproca, utque *ua* ad *ay*, ſic *yi* ad *ue*. Jam vero ut *ua* ad *ay*, ſic per c 9 e 7 *oi*, id eſt per 6 e 10 *ea* ad *iy*, & ſic igitur ex concluſo *yi* ad *ue*, & ſic per c 9 e 7 *ue* ad *eo* id eſt per 6 e 10 ad *ai*. Itaque ut *ea* ad *yi*, ſic *yi* ad *ue*, & ſic *ue* ad *ai*. Quare interſegmenta *eu* & *iy* ſunt continue proportionalia inter datas.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XIIII.

de rectis proportionaliter ſectis & de reliquis quadrangulis.

Adhuc ſectio triplex fuit, unde æqualitatis rationes quinque fuerunt rationalis

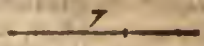
nalis: ſequitur de ſectione tertia alia ſectio in ſegmenta duo toti proportionalia. Sectio ipſa primum definienda.

1. *Recta ſecatur ſecundum mediam & extremam rationem, quando fuerit ut tota ad majus ſegmentum, ſic majus ſegmentum ad minus. 3 d 6.*

Hæc definitio geometrici generis tota eſt, per tropum tamen quendam ſermonis ratio media & extrema dicitur pro medio & extremo proportionis termino. Secatur enim hæc linea ſic, ut ipſa cum duobus ſegmentis faciat tres proportionis terminos, ipſaque tota ſit primus terminus, majus ſegmentum medius, minus ſit tertius, id breviter & proprie dicatur ſecari proportionaliter. Proportioni autem ſectionis hujus à Campano 10 p 14 mirabilis potentia tribuitur in adſcriptionibus ordinatorum ſolidorum: Cui (ait) cum plurima philoſophantium admiratione digna conveniant, hoc principium vel præcipuum ex ſuperiorum principiorum invariabili procedit natura, ut tam diverſa ſolida tum magnitudine tum baſium numero, tum etiam figura irrationali quadam ſymphonia rationabiliter conciliet. Hæc Campanus, alioquin laudum orator parciſsimus. Eadem ſectionis proportio divina appellatur à Luca Paciolo in libro hac de re perſcripto, & cujus ſingulares uſus comperientur vel in elementis Euclideis de fabrica quinquanguli, icoſaedri, dodecaedri. Atque inde & cæleſtium rerum præcipua myſteria à Ptolemæo repetuntur.

2. *Si recta proportionaliter ſecta eſt rationalis datæ menſuræ, ſegmenta ſunt ad eam & inter ſe irrationalia. é 6 p 13.*

Euclides appellat utrumque tale ſegmentum ἀποτομὴν reſiduum, & certe ſegmenta hæc aliter explicari non poſſunt quam per reſiduum, ut ſi linea 7 pedum ponatur hoc modo, majus ſegmentum dicetur linea 7 pedum unde minus ſegmentum detractum ſit, neque minus ſegmẽtum poteſt aliter explicari, niſi pars reliqua lineæ 7 pedum, unde majus ſegmentum ſit detractum. Triangulum & é triangulatis omnia excepto parallelogrammo rectangulo, irrationalia eſſe ſumuntur in geometria, neque tamen proponuntur, & hoc item ſumi potuiſſet. Hæc igitur ſectionis proportionalis definitio eſt: ſectio ſequitur é ratione oblongi cum quadrato.

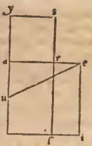


3. *Si quadratum fiat é data recta, rectæ ab angulo facti ad medium contermini lateris differentia ſupra dimidium erit majus ſegmentum datæ proportionaliter ſectæ. 11 p 2.*

Eſto data *a e*, quadratum ex ipſa *a e i o* & ab angulo *e* ad *u* medium contermini lateris, ſit recta *e u*, & comparetur dimidio *u a*, differentia ſupra dimidium erit *a y*, quam dico majus eſſe ſegmentum datæ *a e* proportionaliter ſectæ. fiat ex

e a qua-

ea quadratum *aysr*, & continuetur *sr* in *l*. Jam per 7 e 13 oblongum ex *oy* & *ay* cum quadrato ex *ua* æquatur quadrato ex *uy*, id eſt per conſtructionem ex *ue*, & ideo per 5 e 12 æquatur quadratis *ea* & *au*. Tollatur utrinque commune quadratum ex *au*. Reliquum oblongum *yl* æquabitur quadrato *ai*, utrinque tollatur commune *al*, quadratum *yr* æquabitur oblongo *ri*. Itaque tres rectæ *ea*, *ar*, *re*, per 4 e 12 ſunt continuè proportionales, & recta *ae* ſecta eſt proportionaliter.



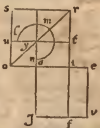
Itaque

Si recta proportionaliter ſecta continuetur majore ſegmento, tota ſecabitur proportionaliter, & majus ſegmentum erit data. 5 p 13.

Ut in eodem exemplo recta *oy* continuata eſt majore ſegmento, & oblongum è tota & minore ſegmento æquatur quadrato majoris. Atque ita licet infinite proportionaliter ſecando rectam augere, itemque contra minuere: minus ſegmentum rectæ proportionaliter ſectæ eſt majus ſegmentum majoris proportionaliter ſecti &: hinc diminutio fiet in infinitum.

4. *Majus ſegmentum continuatum dimidio totius poteſt quintuplum ejuſdem dimidii, & ſi recta poteſt quintuplum ſui ſegmenti, reliquum factum duplum prædicti ſecatur proportionaliter, & majus ſegmentum eſt idem reliquum. 1 & 2 p 13.*

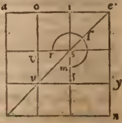
Hæc fabrica eſt proportionalis ſectionis. ratio triplex ſequitur: prima eſt majoris ſegmenti. Recta igitur *ae* ſecetur proportionaliter in *i*, majuſque ſegmētum ſit *ia*, & ſecta cōtinuetur in *io*, ut *oa* ſit dimidium ſectæ: dico quadratum ex *io* quintuplum eſſe quadrati ex *ao*: fiat igitur ex *ao* quadratum *aouy*, item ex *io* fiat quadratum *iosr*, videmus quadratum *ua* ſemel comprehendi in quadrato *si*. jam doceamus in gnomone reliquo *lmn* quater comprehendi, & deſcribatur quadratum *aeJv* & continuetur *rt* in *f*, hic quadratum *ae* quadruplum eſt per 7 e 12 ad illud *ua* deſcriptum è dimidio, & æquatur gnomoni. Nam pars *tiv* æquatur ipſi *ry*, primo per theſim cum *ai* ſit majus ſegmentum, unde *ry* fit quadratum, quia diagonale alterum etiam quadratum: ſecundo complementa *sy* & *yi* per 11 e 10 æquantur, & iis æquatur *af*. Nam per 12 e 10, perque theſim dupla eſt complementi *yi*. Itaque æquatur utrique.



que. Quare gnomo æquatur quadrato quadruplo dicti quadratuli, majuſq; ſegmentum continuatum dimidio datæ poteſt quintuplum. Converſa patet in eodem exemplo. Nam cum *io* poſsit quintuplum ipſius *ao*, gnomo *lmn* erit quadruplus ipſius *ua*, cujus etiam per 7 e 12 quadruplum eſt *av*. Itaque æquale gnomoni: *aj* autẽ æqualis ipſi *ae*: Itaque dupla etiam ipſius *ao* id eſt ipſius *ay*, & ideo per 13 e 10 *ji* duplum ipſius *at*, ideoque æquale complementis *iy* & *ys*, reliquum igitur diagonale *yr* æquatur reliquo rectangulo *iv*. Quare per 4 e 12 ut *ev* id eſt *ae* eſt ad *yt* id eſt *ai*, ſic *ai* ad *ie*. Quare per 1 e 4 *ae* ſecatur proportionaliter, & majus ſegmentum eſt *ai* dictum reliquum. ſequitur altera proprietas quintupli.

5. *Minus ſegmentum continuatum dimidio majoris poteſt quintuplum ejuſdem dimidii. é 3 p 13.*

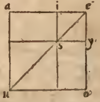
Ut hic recta *ae* ſecetur in *i* proportionaliter, & minus ſegmentum *ie* continuetur uſque ad *o* dimidio majoris *ai*. Dico *oe* poſſe quintuplum ipſius *io*. fiat igitur ex linea *ae* quadratum, & compleatur figura, noteturque dimidii quadratum *su* & gnomo *rlm*. Hic primum quadratum *oy* eſt quintuplum ſecundi *su*. Comprehendit enim ſemel & gnomo reliquus *rlm* quater: æquatur enim oblongo *in*, quia *os* complementum æquatur ipſi *sy* per 11 e 10, & ideo ipſi *jn*, cum totum complementum *as* totis *n* æquetur, & *av* ipſi *os* æquetur per fabricam & 12 e 10, additoque utrique communi *iy*, totus gnomo toti oblongo æquatur. At oblongum *in* æquatur quadrato *aj* per theſim & 4 e 12, quod per 7 e 12 quadruplum eſt quadrati *su*. Quare minus ſegmentum *ie* continuatum *io* dimidio majoris poteſt quintuplum ejuſdem dimidii.



Sequitur ratio tripli.

6. *Tota & minus ſegmentum poſſunt triplum majoris. é 4 p 13.*

Sit recta *ae* ſecta proportionaliter in i, & figura compleatur, oblonga *ay* & *io* cum quadrato *su* per 4 e 13 æquantur quadratis ex *ae* & *ie* potentibus triplum ipſius *ai*. Nam ſemel continent quadratum *su*, & oblongum utrumque eidem quadrato *su* æquatur per theſim & 4 e 12. Itaque ter continent.



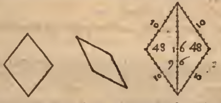
7. *Parallelogrammum obliquangulum eſt rhombus aut rhomboides.*

Hactenus

Hactenus geometria fuit parallelogrammi rectanguli, ſupereſt breviſsima in Euclidis elementis geometria de parallelogrammo obliquangulo, deque rectilineis reliquis, neque omnino prolixa geometria hic requirebatur, quia ex antecedente tota percipitur, reducendo nempe ad parallelogrammum per 2 e 11 e 10, quod per ſpecies ſpecialibus exemplis intelligetur. Euclides autem ſine ulla partitionis luce negligentius expoſuerat, & à Poſidonio ob eam cauſſam emendatus, ut Proclus indicat: Nos igitur ex methodica lege iſtam lucem aſpernari nequaquam debuimus: parallelogrammum obliquangulum jam definitum eſt ex oppoſito parallelogrammi rectanguli: ut patet 2 e 11, ubi omnes obliqui ſunt anguli, neque enim poteſt unus rectus eſſe in parallelogrammo, quin omnes ſint recti, nec unus obliquus, quin omnes etiam ſint obliqui. Dichotomia vero oppoſito genere reſpondet parallelogrammo rectangulo quadrato & oblongo. Nam quadratum & oblongum in rhombum & rhomboides diſlocantur.

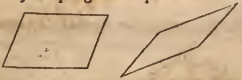
8. *Rhombus eſt obliquangulum æquilaterum.* 32 d1.

Unde conſtat rhombum eſſe quadratum angulis veluti compreſſum, quo nomine & piſcis & nentium mulierum inſtrumentum & in vitreis feneſtris diſſectæ plumbo laminæ, quia figurã hanc præ ſe ferant, appellantur. Quo vero compreſsior rhombus fuerit, tanto magis duo acuti erunt anguli, duo obtuſi, ut hic. Exemplum vero metiendi rhombi in triangula ſecti ſic eſt, geodæſia enim triangulatorum à triangulis repetitur.

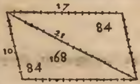


9. *Rhomboides eſt obliquangulum inæquilaterum.* 33 d1.

Et rhomboides oblõgo ſic opponitur, ut rhombus quadrato, ſic item quanto major coarctatio fuerit, tanto major inæqualitas erit angulorum obtuſorum & acutorũ, ut hic.



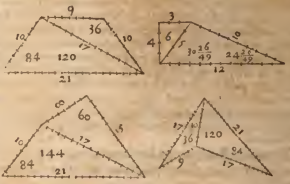
Et rhomboides dicitur tãquã rhombo ſimile, tametſi ſimile præter inæ-



qualitatem angulorum nihil habet, menſuræ exemplum ſic eſto.

10. *Trapezium eſt quadrilaterum, non parallelogrammum.* 34 d 1.

Supereſt é quadrangulis trapezium. Euclides poſtulat hanc fabricam trapezium tanquam menſulam vocari: & ſane nominis eius ratio geometrica nulla eſt. Exempla figuræ & menſuræ ita ſunto. Ergo triangulata quadrangula eiuſmodi ſunt.

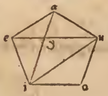


11. *Multangulum eſt quod pluribus quam quatuor lineis rectis comprehenditur.* 23 d 1.

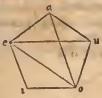
Hoc generali nomine reliqua omnia figurarum deinceps rectilinearum genera Euclides complexus eſt, ut ſunt quinquangulum, ſexangulum, ſeptangulum, & deinceps pro numero angulorum innumerabilia. In quolibet autem multanguli genere unum ordinatum eſſe prædiximus, ut quinquangulum ordinatum, ſexangulum ordinatum, & ſic in aliis. De quibus omnibus ſeparatim quod hic percipi poſsit, nihil animadverti, niſi unum de quinquangulo, quod adiungemus, reliquis in adſcriptionem reiectis.

12. *Si quinquangulum æquilaterum tribus angulis æquatur, eſt æquiangulum.* 7 p 13.

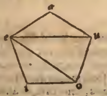
Ut in *aeiou* quinquangulo tres ſunt anguli ad *a, e, i,* æquales dico & reliquos, & reliquos ipſis æquari: cōnectātur *eu, ai, iu*. Hic triangula *aei* & *eau* per theſim perque 2 & 3 e 7 æquilatera & æquiangula, & baſes *ai* & *eu* æquantur, & anguli *eai, aue* æquantur



æquantur: item *aeu* & *eia*. Itaque *ay* & *ye* æquantur per 10 e 6, item reliquum *yu* reliquo *yi* æquatur cum ab æqualibus æqualia ſublata ſint: æquantur etiam per theſim & 10 e 6 *oui* & *oiu*: quare terni æquantur, totuſque ideo angulus ad *u* æquatur toti angulo ad *i*, proindeque æqualibus. Dico inſuper angulum ad *e* ſimiliter æquari, ſi connectantur *oa* & *oe*: Ut hic.



Nam terni ſimiliter redeunt æquales.



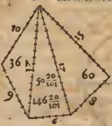
Quod ſi anguli tres non deinceps æquentur; ut *aio*, facilior etiam res erit: Ut hic.



Nam *eua* & *eoi* anguli æquantur per theſim, interioreſq; *eou* & *euo*. Itaque toti ex binis æquantur. De reliquo ad *e* idem erit, ſi connectatur *iu*, ut hic: toti enim ex binis æquabuntur.

Triangulata multangula è ſuis item triangulis menſuram capiunt.

Ut hic, quinquangulum è triangulis tribus.



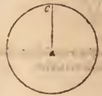
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XV.

de lineis circuli.

ADhuc rectilineorum geometria fuit: ſequitur geometria obliquilineorum, é quibus præcipuus eſt circulus.

1. *Circulus eſt planum rotundum. é 15 d 1.*

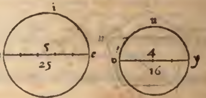
Ut hic vides rectilineũ 3 e 6 definitur planum rectis lineis comprehenſum, & ita potuit circulus definiri planum peripheria comprehenſum: ſed rotundius eſt hoc modo & brevius, ut poſtea in ſphærico & ſphæra. De



ſcribẽdi vero circuli circinus idẽ artifex eſt qui fuit peripherię: ſed illic motus pũcti in extremo radio peripheriam lineantis conſideratus eſt: hic conſideratur motus radii totam aream radiantis. Circulus Ariſtoteli 6 cap. 3 Rhetoric. eſt planum â medio æquale, quod eodem quidem redit, ſed â medio æquari commune eſt etiam ſphæræ. Circulus vero eſt ordinatiſsimus planorum, ut antea patuit. 7 e 4.

2. *Circuli ſunt ut á diametris quadrata. 2 p 12.*

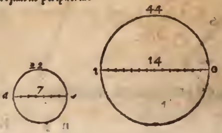
Circuli enim ſunt plana ſimilia & eorum latera homologa diametri, ut prædictum eſt 15 e 4: ideoque per 1 e 6, ut á diametris quadrata: quæ nempe duplicata ratio eſt homologorum laterum: Ut hic



circulus aei ad circulum ouy, ut 25 ad 16 quadrata á diametris 5 & 4. De Euclidea demonſtratione propoſitionis hujus erit in ſcholis *Itaque*

Diametri ſunt ut peripheriæ.

Eſt Pappi th. 5 1 11 & 26 th. 18, ut hic vides in ae, io.



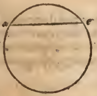
3. *Geome-*

3. *Geometria circularis eſt in lineis aut in ſegmentis circuli.*

Partitio hæc de rebus ſubjectis utrumque ſumitur ad materiam confuſiorem aliqua luce ſeparandum, & quidem de lineis, conſideratio ſecantium hic prior eſt, & primo inſcriptarum.

4. *Si recta duobus in peripheria punctis terminetur, cadet intra circulum.* 2 p 3.

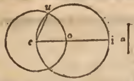
Ut hic *a e*, quia intra eadem puncta recta brevior eſt, quā peripheria per 5 e 2. Hinc ſequitur infinita



ſectio, de qua c 5 e 1. Hæc igitur propoſitio docet quomodo recta ſit inſcribenda circulo, ſumptis nempe duobus in peripheria punctis.

5. *Si à termino diametri ex eaque radio æquanti datam rectam peripheria deſcribatur, recta à dicto termino in concurſum peripheriarum inſcribetur dato circulo æqualis datæ rectæ.* 1 p 4.

Ut ſit data *a* & ab extremo *e* diametri *e i* & ejus parte *e o* æquante datam *a* peripheria deſcribatur *e u*, recta *e u* à dicto extremo *e* ad *u* concurſum peripheriarum inſcribetur dato circulo per 4 e æqualis datæ, quia æquatur ipſi *e o* per 3 c 5 e 5, cū

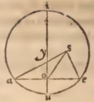


ſit radius peripheriæ ejuſdem. Atque hæc propoſitio docet quomodo recta data ſit inſcribenda circulo æqualis datæ. Inſcriptarum porro coryphcæ eſt diameter: oſtendit enim centrum, oſtendit rationem omnium inſcriptarū. Itaque diametri circularis inventio primum generiſque doceatur.

6. *Si inſcripta recta biſecat inſcriptam, eſt diameter circuli, ejuſque medium eſt centrum.* 1 p 3.

Ut ſit inſcripta *a e* & inſcripta *i o u* recte ipſam biſecans *n o*. Dico biſecantem eſſe diametrum & centrum eſſe ejus medium, ut in *y*. Cauſſa eadem quæ 3 e 11, quia biſecta eſt pro latere inſcripti rectanguli & ſubtendit biſectam peripheriā, quibus oppoſitæ & inſcripta & peripheria perinde biſecarentur: ideoque recto biſecans eſt diameter rectanguli, circularis autem diametri medium centrum eſſe patet è 2 c 5 e 5 & è c 17 e 4. Euclides impoſsibile quam cauſſam maluit & ita co-

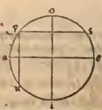
ita cogit. Nam ſi *y* non eſt centrum, ſed *s*, pars æquabitur toti. Nam triangulum *a o s* triangulo *e o s* æquilaterum erit: æquantur enim *a o* & *o e* ex theſi, item *s a* &



s e radii, & *s o* communis eſt. Itaque per 1 e 7 anguli deinceps ad *o* æquantur, & per 8 e 5 ſunt recti. Rectus igitur eſt *s o e*: ęqualis itaque per theſim recto *y o e*, pars toti. Quare non eſt centrum, itemque accidet de reliquis punctis extra *y*. Itaque

1. *Si duæ rectæ duas inſcriptas recte biſecent, concurſus biſecantium erit centrum circuli.* è 25 p 3.

Ut hic *a e* & *i o* biſecent rectas *u y* & *y s*. Antea enim patuit 1 & 2 e 5 e 4 centrum eſſe in diametro & in concurſu diametrorum. Centrum igitur dupliciter invenietur & è medio diametri, & è concurſu diametrorum in medio biſectarum: concurſu hic nil opus eſt, plurium diametrorum unica ſatis eſt dimeter.



Et licet

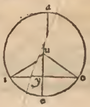
2. *Peripheriam ducere per tria puncta in rectam minime cadentia.*

Ut hic per *a*, *e*, *i*.



7. *Si diameter biſecat adiametrum, recte ſecat: & contra.* 3 p 3.

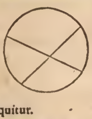
Ut diameter *a e* biſecet adiametrum *i o*, &



ſine

ſint radii *ui* & *uo*. Cauſſa item eſt quæ 3 e 11.

8. *Si a diametri interſecantur, ſegmenta ſunt inæqualia.* 4 p 3.



Conſectarium eſt é 17 e 4. Nam ſi inſcriptæ eſſent biſectæ, eſſent diametri contra theſim. Sed ratio eſt in partibus inſcriptarū, proportio in iiſdem partibus ſequitur.

9. *Si duæ inſcriptæ interſecantur, rectangulum é ſegmentis unius æquatur rectangulo é ſegmentis reliquæ.* 35 p 3.





Si interſectæ ſint diametri patet proportio, ut in prima figura. Nam rectangulum é ſegmentis unius æquatur rectangulo é ſegmentis reliquæ, cum ſint ambo quadrata laterum æqualium. Si non ſint diametri, ſunto a diametri *ae* & *io*: dico oblongum ex *au* & *ue* æquari oblongo ex *ou* & *ui*. Sint enim radii ex *y* centro *ye* & *yi* utriuslibet quadrato utrumque æquabitur rectangulum é ſegmentis. Nam per 6 e cadat diameter *yu* in punctum communis ſectionis *u*, ſuntque perpendiculares *ys* & *yr*. Hic per 3 e 11 inſcriptæ ſecantur æqualiter in punctis *r* & *s*, & inæqualiter in puncto *u*. Itaque per 6 e 13 oblongum ex *ou* & *ui* cum quadrato *su* æquatur quadrato *si*, & addito communi *ys*, oblongum idem cum quadratis *us* & *sy*, id eſt per 5 e 12 cum quadrato *yu* æquatur quadratis *is* & *sy*, id eſt per 5 e 12 quadrato *iy*, id eſt per 3 c 2 e 12 *ye*, cui per eandem cauſſam patet oblongum alterum cum quadrato *yu* æquari. Tollatur utrinque quadratum *yu*, oblonga igitur æquabuntur eidem, idcoq; inter ſe. Atque hæc comparatio de partibus inſcriptarum. Sequitur ratio integrarum inſcriptarum, quam diameter una totam facit.

10. *Inſcriptæ æquidiſtant á centro, in quas á centro perpendiculares ſunt æquales.* 4 d 3.

o Ut pa-

Ut patet in proxima figura de lineis *ae* & *io*, in quas à centro *u* perpẽdiculares *uy* & *us* ſunt æquales.



11. *Si inſcriptæ ſunt æquales, æquidiſtant á centro: & contra.* 14 *p* 3.

Diametri in eodem circulo per 17 e 4 ſunt æquales & à centro æqualiter diſtant, cum ſint per centrum, vel potius nihil omnino diſtant, reliquæ inſcriptæ judicantur æquales, majores, minores à diametro vel diametri centro. Euclides ſuperius illud principii loco poſtulavit, duo ſequentia præſentis elementi, ut demonſtrabilia propoſuit, cum tamen per ſe elatiora ſint & evidentiora. Demonſtrationem Euclidis de prima parte ſi quis requirat, hæc eſt, converſo tamen modo. Sunto primum *ae* & *io* æquales, dico æquidiſtare á centro. Ducãtur enim perpendiculares *uy* & *us*, ductæ biſecabunt datas per 3 e 11 & *ya* & *si* æquabuntur, quia dimidia ſunt æqualium. Sunto nunc radii *ua* & *ui* eorum quadrata per 5 e 12, æquantur binis quadratis crurum quæ bina, ideo æquantur, tollantur ab æqualibus quadrata *ya* & *si*, relinquentur æqua *yu* & *us*, lateraque ideo æqua per 2 c 2 e 12. Converſa ſimiliter patet. Nam datæ perpendiculares biſecant & dimidia ut prius æqualia.

12. *Inſcriptarum inæqualium diameter eſt maxima, diametroque propior major remotiore, remotiſſima minima, minimæque propior minor remotiore, duæque utrinque á diametro ſolæ æquantur.* e 15 *p* 3.

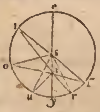
Hic partes quinque ſunt, prima diameter eſt maxima, ſecunda diametro propior eſt major, tertia remotiſsima minima: quarta minimæ propior minor: quinta, duæ utrinque æquales, quæ omnes patent ex eodem illo æqualitatis argumento, id eſt centro decreſcendi principio, & creſcendi fine. Nam quo magis á centro receditur, aut ad cẽtrum acceditur, tanto minor aut major efficitur inſcripta. Euclidis autem concluſio eſt per triangula de duobus lateribus majoribus reliquo, deque majore angulo. Prima pars ſic patet, quia diameter *ae* æquatur *il* & *lo*, radiis nempe & majoribus per 7 e 6, quam *io*, & ſic deinceps. Secunda pars de propiore patet per 4 e 7, quia triangulum *ilo* triangulo *uly* æquicrurum majus eſt angulo: Ergo & baſi. Tertia quartaque pars cõſectaria primæ & ſecundæ ſunt, quinta pa-



tet per

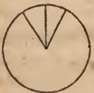
tet per ſecundam partem. Nam ſi præter *io* & *sr* ſtatuatur æqualis tertia, erit eadem etiam inæqualis, quia diametro propior & remotior.

13. *Rectarum á diametri puncto non centro in peripheriam, quæ per centrum, eſt maxima, propiorque maximæ eſt major remotiore, reliqua maximæ minima, minimæque propior minor remotiore: duæque utrinque á maxima vel minima ſolæ æquantur. 7 p 3.*



Prima pars de *ae* & *ai* patet, ut antea per 7 e 6. ſecunda de *al* & *ao*, item de *ao* & *au* per 4 e 7. Tertia *ay* eſt minor quam *au*, quia *sy* æqualis ipſi *su* minor eſt rectis *sa* & *au* per 7 e 6, & ſublato communi *sa*, relinquetur *ay* minor quã *au*. Quarta pars é tertia ſequitur. Quinta ſic eſto: *sr* æquans angulum *asr* angulo *asu*, baſes *au* & *ar* æquabuntur per 2 e 7. His ſi tertia ponatur æqualis, ut *al*, ſequeretur per 1 e 7 angulum totum *lsa* particulari *rsa* æquari, atque é quinta parte conſectarium eſt. Itaque

Si punctum in circulo eſt terminus trium rectarum in peripheriam æqualium, eſt centrum circuli. 9 p 3.



Secus á puncto diametri non centro non ſolum duæ utrinque æquarentur. Nam per quodlibet punctum diameter agi poteſt. Tale etiam fuit antea in quinquangulo: ſi tres anguli ſunt æquales, omnes ſunt æquales. Ita in circulo: ſi tres ab eodem puncto rectæ in peripheriam æquantur, omnes æquantur.

14. *Rectarum á dato extra puncto in concavum peripheriæ, quæ per centrum, eſt maxima, propiorque maximæ eſt major remotiore: in convexum, ſegmentum maximæ eſt minima: minimæque propior minor remotiore, duæque utrinque á maxima vel minima ſolæ æquantur. 8 p 3.*

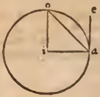
De-
mon-
ſtratio
ſimilli
ma ſu
perio-
ri de
quin-
que
parti-
bus.



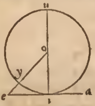
Atque hæc de ſecantibus, ſequitur de tangentibus.

15. *Si recta eſt perpendicularis extremæ diametro, tangit peripheriam: & contra. é 16 p 3.*

Poſtulandum hoc fuerat ex ipſa perpendiculi definitione, quia ſi magis hæc propenderet, ſecaret, nec eſſet perpẽdicularis. Euclides tamen ita cogit. Secus eſto recta *ae* perpendicularis diametro *ai*, & recta ab *o* cum cẽtro *i* cadat intra ad *o*



& connectatur *oi*. Hic in triangulo *aoi* duo anguli contra 9 e 6 recti eſſent ad *a* per theſim & *o* per 10 e 6. Super eſt demonſtratio conver



ſæ ſimillima antecedenti. Nam ſi *ae* tangens non eſt perpendicularis diametro *iou*, ducatur à centro *o* perpendicularis *oe*, tum angulus *oei* erit rectus, & *oie* acutus. Ideoque per 11 e 6 *oi* id eſt *oy*, major erit, quam *oye*, id eſt pars, quam totum. Itaque

1. *Si recta eſt per centrum & contactum, eſt perpendicularis tangenti. 18 p 3.* Et

2. *Si eſt perpendicularis tangenti, eſt per centrum & contactum. 19 p 3.*

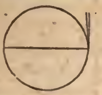
Nam recta vel à centro in contactum vel á contactu in centrum eſt pars diametri. Et

3. Punctum

3. *Punctum contactus eſt, quo á centro perpendicularis tangenti incidit.* Et

4. *Tangens eſt ſingularis eadem parte.*

Con ſecta-rium eſt é 10 e 2, qa tan-gens



eſt ipſa perpendicularis. Id Euclidi eſt ſpecialius propoſitum, quod nullla alia recta inter peripheriam & tangentem cadat Et

5. *Angulus contactus eſt minor quovis acuto rectilineo.é 16 p 2.*

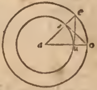
Angulus contactus eſt angulus rectæ tangentis & peripheriæ, qui vulgo dicitur angulus contingentiæ, à Proclo dicitur κερατοειδὴς cornicularis, quia ex recta & peripheria inſtar cornu efficitur: minor igitur quovis acuto rectilineo. Quia ſi minor non eſſet, caderet recta inter peripheriam & perpendicularem. Poſtulat autem Euclides in opticis minimum angulum, ſed opticum & phyſicum, non geometricum.

6. *Anguli contactus in æqualibus peripheriis ſunt æquales.*

Et ſic in catoptricis 1 p æqualitas iſta ſumitur. In peripheriis autem inæqualibus cornicularis minoris eſt major quam cornicularis majoris.

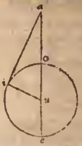
16. *Si á radio ex datæ peripheriæ centro ad datum extra punctum peripheria deſcribatur, & á concurſu datæ, radiique radio ipſi perpendicularis in deſcriptam connectatur cum dicto centro, recta a' dato puncto in concurſum datæ & connectentis tanget datam peripheriam.* 17 p 3.

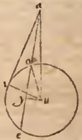
Ut radio *ae* à centro *a* datæ peripheriæ ad datum punctum e deſcribatur peripheria *eo*, & ſic in deſcriptam radio perpendicularis *io*: connexa ad centrum *a*, ducatur denique *eu*. Dico ductam *eu* tangere. Quia perpendicularis erit extremæ diametro. Nã triangula *eau* & *oau* per 2 e 7, cum ſint æquicrura & crurum communi angulo æqua, æquantur angulis ad baſim. At angulus *oia* rectus eſt, rectus igitur angulus *eua*. Itaque recta *eu* per 10 e 2, eſt perpendicularis. Atque hæc de ſecantibus & tangentibus, ſequitur de ſimul utroque genere.

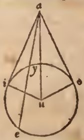


17. *Si é duabus rectis a' dato extra puncto prima ſecat in concavum, reliqua tangit, oblongum e' ſecante & exteriore ſecantis ſegmento æquatur quadrato tangentis: & ſi oblongum tale æquatur quadrato reliquæ, reliqua ipſa tangit.* 36 & 37 p 3.

Si ſecans tranſit per centrum, res expeditior eſt, ut hic *ae* ſecet, *ai* tangat, exterius ſegmentum eſt *ao* & centrum *u*. Jam *ui* erit perpendicularis tangenti per 1 e 15 e, tum per 7 e 13, oblongum ex *ea* & *oa* cum quadrato *ou*, id eſt *iu* æquatur quadrato *au*, id eſt per 5 e 12 quadratis *ai* & *iu*. Commune *iu* tollatur, æquabitur rectangulum quadrato tangentis. Si ſecans non tranſit per centrum: ut in hac figura, centro *u* per 1 e reperto, *iu* per 1 e 15 e erit perpendicularis tangenti *ai*, tum ducantur *ua* & *uo*, & perpendicularis *uy* biſecãs *oe* per 7 e. Hic per 7 e 13 oblongum ex *ae* & *ao* cum quadrato *oy* æquatur quadrato *ay*. Itaque communi addito *yu* idem oblongum cum quadratis *oy* & *yu*, id eſt per 5 e 12 cum quadrato *ou* æquatur quadratis *ay* & *uy*, id eſt per 5 e 12 *au*, id eſt rurſus *ai* & *iu*. Denique tollantur utrinque quadrata æqua *uo* & *ui*, relinquetur oblongum æquale quadrato tangentis. Converſa ſimiliter demonſtratur in hac figura. Eſto rectangulum ex *ae* & *ay* æquale quadrato ipſius *ai*. Dico *ai* tangere. Ducatur per 16 e tangens *ao*, item ſint *au*, *ui*, *uo*. Hic oblongum ex *ea* & *ay* æquatur quadrato *ao* per 17 e, & quadrato *ai* per theſim. Itaque *ai* & *ao* ſunt æquales. Tum *uo* per 1 e 15 e eſt perpendicularis tangenti: Hic triangula *auo* & *aui* ſunt æquilatera, & per 1 e 7 æquiangula: angulus autem ad *o* rectus eſt, rectus igitur & ei æqualis ad *i* per e 8 e 3. Quare *ai* eſt perpendicularis extremæ diametro, & per 15 e tangit.







Itaque

1. *Tangentes ab eodem puncto ſunt æquales.*

Quia ipſarum quadrata eidem oblongo æquantur. Et

2. *Oblonga é quolibet ex eodem puncto ſecante & ſecantis exteriore ſegmento æquantur inter ſe.* Quia

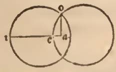
Quia æquantur eidem. Campanus ad 36 p 3. Et

3. *Datis duabus rectis licet alteri continuare tertiam, ut oblongum ex continuata & continuatione æquetur quadrato reliquo.*

Vitellio 127 p 1. Ut in prima figura, ſi prima è datis ſit *eo*, ſecunda *ia*, tertia *oa*. Supereſt geometria circularis de peripheriis interſectis & contiguis, deq; rectis & peripheriis.

18. *Si peripheriæ ſunt interſectæ vel contiguæ ſunt eccentricæ: illæque duobus tantum punctis interſecantur, hæ diametros per contactum continuant.* 5.6.10.11.12 *p* 3.

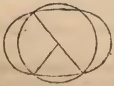
Hæc omnia poſtulari poterãt: demonſtrationes autem habent ex impoſsibili non difficiles. Prima pars patet, quia pars æquaretur toti, ſi centrum eſſet idem ut *a*. Nam duo radii communi radio *ao* æquantur, ideoque inter ſe æquantur *ae* & *ai* pars toti. Secunda pars ut prima demonſtratur: ſecus pars æquaretur toti: Ut hic æquantur radii minoris peripheriæ *ae* & *ai*: item majoris *ae* & *ao*. Quare *ai* æquaretur ipſi *ao* pars toti. Si peripheriæ ſint foris contiguæ, res expeditior eſt, neque demonſtrationem Euclidis judicio meruit, Ut hic.







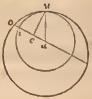
Tertia pars patet è prima: ſecus interſectæ eſſent concentricæ. Nam per 5 e centro invento, & per 2 c 5 e tribus rectis ad

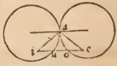


tria ſe-

tria ſectionum puncta ductis à centro, radii tres eſſent æquales. Ut hic

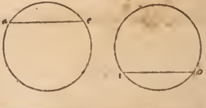
Quarta pars eodem modo demonſtratur, quia ſecus pars eſſet major toto: Ut hic. Eſto namque per centra *a* & *e* recta *aeio*. Hic trianguli *uea* duo latera *u e* & *e a* per 7 e 6 ſunt majora quam *ua*, ideoque quam *ao*: tollatur *a e*, reliquum *u e*, majus erit quam *eo*. At *ei* æquatur ipſi *eu*. Quare *ei* majus eſt quam *eo* pars toto. Idem erit ſi tactus ſit extra. Ut hic. Nã per 7 e 6, *ea* & *ia* majora ſunt quam *ie*. At *eo* & *iu* æquantur ipſis *ea* & *ia*. Quare *eo* & *iu* ſunt majores quam ipſa *ie* partes toto. De rectis & peripheriis ſimul una ratio eſt.





19. *Si inſcriptæ ſunt æquales, ſecant peripherias æquales: & contra.* 28.29 *p* 3.

Res conſtat ἐφαρμόσει, Ut in exẽplo: cõgruant enim circuli, tum æquales inſcriptæ & peripheriæ congruent.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XVI. de circuli ſegmentis.

1. *Segmentum circuli eſt quod comprehenditur extrinſecus a' peripheria, intus a' recta.*

Geometria ſegmentorum communis eſt etiam ſphæræ, ſed modo explicatu difficile eſt hoc ipſum generale, & ſegmentum comprehendi intus poteſt linea obliqua

obliqua ſive ſimplici ſive multiplici, ſed hic uſitata ſequimur. Itaque dum facilius occurret, utemur Euclide. Primo igitur definitio generalis præponitur ad ſubjectas ſpecies facilius diſtinguendum.

2. *Segmentum circuli eſt ſector aut ſectio.*

Hæc utraque ſpecies nominatur in Euclide & definitur ſpeciatim: ſegmentum autem & ſectio & ſector nomina pene eadem ſunt, definitionibus tamen diſtinguentur.

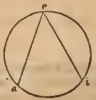
3. *Sector eſt ſegmentum intus comprehenſum á recta duplici faciente angulum in centro, qui angulus in centro dicitur: ut peripheria dicitur baſis ſectoris. 9 d 3.*

Ut aei ſector eſt. Hic ſector definitur, & ejus rectilineus angulus abſolute dicitur angulus in centro. Reliquum autem á ſectore: ut hic aoie dicitur Archimedi ſector major, qui tamen in duos ſectores interjecto radio ſecari poteſt, ut poſtea ſecatur in geodæſia ſectionis.



4. *Angulus in peripheria eſt angulus comprehenſus á duabus rectis inſcriptis, & in peripheria conterminis. 8 d 3.*

Sector in peripheria dici potuit, intus nempe comprehenſus á duabus rectis conterminis in peripheria, ut hic aei. At in elementis neque mentio neque uſus talis ſectoris eſt, tametſi angulus ipſius abſolute angulus in peripheria dicitur, ut ſectoris in centro angulus appellatur angulus in centro.

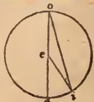


5. *Angulus in centro duplus eſt anguli in peripheria in eandem peripheriam inſiſtentis. 20 p 3.*

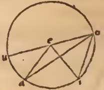
Varietas exempli hic triplex eſt Euclidi: demonſtratio tamen una, ut hic angulus eai in centro, anguli eoi in peripheria duplus probabitur recta ou ſecan-



te duo triangula utrinque æquicrura, & per 10 e 6 ad baſim æquiangula: quorum ſigillatim dupli ſunt anguli, *eau* ipſius *eoa* & *iau* ipſius *ioa*. Nam cum duobus interioribus æqualibus æquetur per 2 c 9 e 6, duplus erit alterius. Itaque totus *eai* duplus eſt totius *eoi*. Secundum exemplum ſic eſt ex angulo in centro *aei*, & in peripheria *aoi*. Hic crura *eo* & *ei* per 17 e 4 æquantur, & per 10 e 6 anguli ad *o* & *i*, quibus angulus in centro æquatur per 2 c 9 e 6. Itaque duplus alterius.



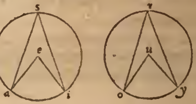
Tertium exemplum eſt ex angulo in centro *aei* in peripheria *aoi* & ſit diameter *oeu*. Hic angulus totus *ieu* per 2 c 9 e 6 æquatur interioribus angulis *eoi* & *eio* æqualibus inter ſe per 10 e 6: Ideoque duplus eſt alterius: Item particularis *aeu* æquatur per 2 c 9 e 6 angulis *eoa* & *eao* æqualibus itẽ inter ſe per 10 e 6. Itaque reliquus *aei* eſt duplus reliqui *aoi* in peripheria.



Si angulus in peripheria æquatur angulo in centro, eſt duplus baſi.

6. *Anguli in centro peripheriave circulorum æqualium ſunt ut peripheriæ in quas inſiſtunt: & contra. é 33 p 6. 26. 27 p 3.*

Hic proportio duplex eſt cum peripheria ſubjecta angulorũ in centro & angulorũ in peripheria. Sed de angulis in centro ſatis ſit explicari. Sunto primum anguli æquales



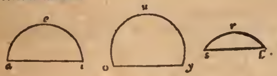
in centro *aei* & *ouy*, baſes *ai* & *oy* erunt æquales per 7 e 7, & peripheriæ *ai* & *oy* per 19 e 15, item æquales. Itaque ſi anguli ſunt inæquales, peripheriæ item tanto inæquales erunt. Idem erit de angulis in peripheria. Converſa item vera eſt, unde etiam ſequitur.

Ut ſector ad ſectorem, ſic angulus ad angulum.

Atque hæc de ſectore.

7. *Sectio eſt ſegmentum circuli intus comprehenſum ab una recta, quæ baſis ſectionis dicitur.*

Ut hic, ſectiones ſunt *ae, io, uy.*



8 *Sectio abſolvitur invento centro.*

Inventio centri patuit 6 e 5, & ſic vides hic abſolvendi circuli modum per c 6 e 15.



9. *Peripheria ſectionis biſecatur perpendiculari biſecante baſim,* 30 *p* 3.

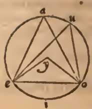
Ut hic. Ducito rectas *ao* & *oe*, triangula habebis *aio* & *eio* per 2 e 7. Itaque baſes *oa* & *oe* æquales & per 19 e 15 æquales peripherias ſubtenſis. Hic Euclides duas peripherias in unam ἐφαρμοσία comprehendit, & nos comprehendimus.



10. *Angulus in ſectione eſt angulus comprehenſus a' duabus rectis cō terminis baſi & in peripheria conterminis.* 7 *d* 3.

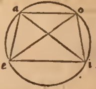
Ut *aoe* in ſuperiore exemplo.

11. *Anguli in eadem ſectione ſunt æquales.* 21 *p* 3.



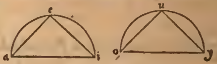
Sectio ſit *eauo*, & in ea anguli ad *a* & *u*: hi æquãtur, quia per 5 e ſunt dimidii ad angulum in centro *eyo*, vel æquantur per 6 e, quia inſiſtunt in eandem peripheriam. Hic conſtat angulos in ſectione reipſa eſſe angulos in peripheria baſique tantum diverſos.

12. *Anguli in oppoſitis ſectionibus æquantur duobus rectis.* 22 p 3.



Hic enim anguli oppoſiti ad *a* & *i* æquantur tribus unius trianguli *eo i* æquantibus duos rectos per 9 e 6. Nam *i* primum æquatur ſibi, deinde *a* per partes æquatur duobus reliquis. Nam *eai* æquatur ipſi *eoi* & *iao* ipſi *oei* per 11 e. Itaque oppoſiti æquantur duobus rectis. Ratio ſectionis ita eſt, ſimilitudo ſequitur.

13. *Si ſectiones capiunt angulos æquales, ſunt ſimiles.* c' 10 d 3.

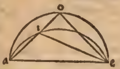


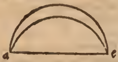
Ut hic *aei*, *ouy*. In definienda ſimilitudine ſectionum circularium adhibet Euclides tantum æqualitatem duorum angulorum, ex qua proportio peripheriarum & baſium conſequitur, ut Pappus ait 13 th. 5 lib. Nec definitio magis hic eſt, quam é definitione generali conſectarium. Et triangula hic inſcripta æquiangula cum ſint ex theſi, etiam per 9 e 7 ſimilia erunt.

14. *Si ſectiones ſimiles ſunt in æquali baſi, ſunt æquales.* 23. & 24 p 3.

In prima figura baſis eadem eſto. Ac ſi dicantur inæquales ſectiones, majorque altera.

que altera a o e, angulus in ea a o e minor erit angulo a i e in minore ſectio- ne per 4 c 9 e 6,





qui tamen per theſim eſt æqualis: In ſecunda figura ſi ſuperponatur ſectio ſecti- oni congruet, ſecus contra primam partem, ſectiones ſimiles in eadem baſi nō eſſent æquales. At res ἐφαρμόσει contenta fuerit. Per ſuperiores autem duas pro- poſitiones & per 2 c 6 e 15 licet invenire datæ ſectioni ſimilem, vel é dato circu- lo amputare.

15. *Angulus ſectionis eſt, qui comprehenditur á terminis ſectionis.* 7 d 3.

Ut e a i & e i a.



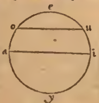
16. *Sectio eſt ſemicirculus aut inæqualis ſemicirculo.*

17. *Semicirculus eſt ſectio dimidia circuli.*

Itaque

Semicirculus comprehenditur á peripheria & diametro. 18 d 1.

Ut a e i eſt ſemicirculus: reliquæ ſecti- ones, ut o y u, & o e u inæ- quales, illa major, hæc minor.



18. *Angulus in ſemicirculo rectus eſt, ſemicirculi minor recto rectili- neo, major quovis acuto: in majore ſectione eſt minor recto, majoris ma- jor, in minore major, minoris minor.* é 31 & 16 p 3.

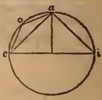
Septem partes ſunt hujus elementi, prima eſt quod angulus in ſemicirculo ſit rectus: Ut in a e i: nam ſi radius ducatur o e dividetur angulus a e i in duos an-

 gulos

gulos *aeo* & *oei* æquales angulis *eao* & *eio* per 10 e 6: Itaque cum ſit æqualis reliquis angulis, eſt rectus per 1 c 3 e 8. Ariſtoteles hanc geometriam complexus eſt 2 poſt, & 9 philoſ. & ait angulum in ſemicirculo rectum eſſe, quia ſit dimidius duorum rectorum, quod eodem redit. Secunda pars quod angulus ſemicirculi ſit minor recto, patet ex eo quia pars eſt recti. Nam angulus ſemicirculi *aie* eſt pars recti rectilinei *aiu*. Tertia quod ſit major quovis acuto: patet per 4 c 16 e 15. Secus enim tangens non eſſet eadem parte ſingularis. Quarta pars ſic patet.



Angulus ad *i* in majore ſectione *aei* eſt minor recto, quia in eodem triangulo *aei*, qui ad *a* rectus. Et ſi crus neutrum ſit per centrum, conſtitui tamen poteſt angulus æqualis dato in eadem nempe ſectione. Quinta ſic. Angulus majoris ſectionis *eai* eſt major recto, quia continet rectum. Sexta ſic. Angulus *aoe* in minore ſectione eſt major recto per 12 e 15, quia qui in oppoſita ſectione ad *i* eſt minor recto. Septima ſic. Angulus *eao* eſt minor recto, quia pars recti nempe exterioris ſi producatur *ia*.

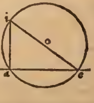


Atque hæc de angulis circuli, quorum omnium efficaciſsimus eſt angulus in ſemicirculo, nec fruſtra ab Ariſtotele toties appellatus. Hanc igitur Ariſtotelis geometriam plenius aperiamus. Hinc enim plurima oriuntur. Itaque

1. *Si duæ rectæ diametro circuli conterminæ conterminentur in peripheria, faciunt angulum rectum.* Et

2. *Si recta infinita ſecetur á peripheria externi centri in punctis dato & contingente, & diameter ſit á contingente, recta á dato puncto connectens diametrum erit perpendicularis ſuper infinitam.*

Ut hic recta *a e* á peripheria *aei* centri *o* extra datā ſecetur in dato puncto *a*, & in puncto contingente ut in *e*, & ſit ab *e* diametere *oi*, recta *ai* á dato puncto *a* connectens diametrum *ioe* erit perpendicularis ſuper infinitā, quia faciet cum infinita angulum in ſemicirculo. Et



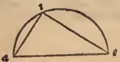
3. *Si recta á dato puncto faciens angulum cum infinita, fiat diameter peripheriæ ſecantis infinitam, recta á dicto puncto connectens ſegmentum erit perpendicularis ſuper infinitam.*

Ut in eodem exemplo recta *ioe* fiat diameter, á cujus biſectione pro centro peripheria ſecet infinitam, & cæt. Et

4. *Si duarum rectarum major fiat diameter circuli, minorque majori contermina & inſcripta connectatur, major plus poterit, quam minor quadrato connectentis. ad 13 p 10.*

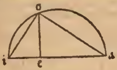
Ut *a e*

Ut *ae* diameter plus poteſt quam *e i* quadrato ex *a i*: rectangulũ enim fiet triangulũ *a e i*, & per 5 e 12 poterit æquale cruribus.



19. *Si recta continuata è duabus rectis fiat diameter circuli, perpendicularis à puncto continuationis in peripheriam erit proportionalis inter datas.* 13 p 6.

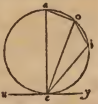
Ut ſunto datæ *a e* & *e i*, è quibus *a e i* continuata ſit, & perpendicularis *e o* ſit in peripheriam *a o i*. Hæc erit media proportionalis, quia ductis rectis *a o* & *i o* triangulum fiet rectangulum, cũ *a o i* ſit angulus in ſemicirculo, & per 1 c 4 e 8 *o e* erit proportionalis inter *a e* & *e i*. Sic ſi quadrati decempedalis latus quæratur oblongi æqualis ipſi quadrato latera unius pedis & decem pedum continuentur, proportionalis media erit latus quadrati.



20. *Anguli in oppoſitis ſectionibus æquantur alternis angulis ſecantis & contiguæ.* 32 p 3.

Ut ſunto ſectiones *e i o*, & *e a o*, tangens ſit *u e y*, & anguli in oppoſitis ſectionibus *e a o* & *e i o*: Dico ipſos æquari alternis angulis ex ſecãte & contigua *o e y* & *o e u*: primo qui ad *a* æquatur alterno *o e y*, quia & tres anguli *o e y*, *o e a*, *a e u* duobus rectis æquantur per 1 c 8 e 5, quibus item æquantur tres anguli in triangulo *a e o* per 9 e 6: à ternis æqualibus tolle rectos *a e u* & *a o e*. Rectus enim eſt *a o e* per 18 e, quia in ſemicirculo, tollatur & communis *a e o*, reliqui *e a o* & *o e y* alterni æquabuntur. Secundo anguli ad *a* & *i* æquantur duobus rectis per 12 e, quibus æquantur & *o e y* & *o e u*. Atqui *e a o* æquatur alterno *o e y*. Ergo qui ad *i* æquatur alterno reliquo *o e u*. Neque vero intereſt, utrum angulus ad *a* ſit ad diametrum. Id enim demonſtrandi tantum cauſſa ſtatuitur, ubilibet enim fuerit, æqualis erit, nempe in eadem ſectione.





Itaque

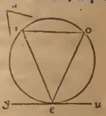
1. Si ad

1. *Si ad terminum datæ rectæ æquetur angulus rectilineus dato, & ab æquati vertice perpendicularis reliquo lateri concurrat cum perpendiculari á medio datæ, concurſus erit centrum circuli per æquatum angulum deſcripti, in cujus oppoſita ſectione ſuper datam angulus æquabitur dato. c 33 p 3.*



Quod in tribus generibus anguli potes experiri eodem ſemper argumento, ut hic datus angulus *a* data recta *e i*, ad terminum *e* æquatus angulus *i e o*, perpendicularis lateri *e o* ſit *e u*, at á medio datæ ſit *y u*: Hic *u* erit centrum optatum. Atque hinc licet ſectionem deſcribere ſuper datam rectam, quæ capiat angulum rectilineum æqualem dato.

2. *Si angulus ſecantis & contiguæ æquetur dato angulo rectilineo, angulus in oppoſita ſectione eidem pariter æquabitur. 34 p 3.*



Ut in ſubjecta figura. Atque hinc licet á dato circulo ſectionem ſecare, in qua ſit angulus æqualis dato. Ut ſit angulus datus *a* & circulus *e i o*, facies ad punctum *e* ex ſecante *e o* & tangente *y u* angulum æqualem dato per 5 e 6 e 5, qualis hic ſit *o e u*, tum ſectio *e o i* capiet angulum æqualem dato. Quapropter hæ ſunt opes anguli in ſemicirculo, ab Ariſtotele ideo tantopere appellati, quibus lubet addere ad extremum quandam ſingularem & mirificam peripheriæ naturam. Angulus ſectionis majoris eſt major recto. Angulus ſectionis minoris eſt minor recto. Ecquid (inquies) cur æqualis ſectionis vel ſemicirculi angulus non erit æqualis recto? Euclides nominatim nihil hic reſpondet, qui tamen dixit ad 16 p 3 angulum ſemicirculi majorem eſſe quovis angulo acuto rectilineo, quod videtur ſolum recto convenire, ex inæqualitate cum recto definitur obtuſus & acutus: Inter obtuſum & acutum rectus eſt. Datur vero in circulo major recto velut obtuſus, datur minor recto velut acutus, datur etiam minor quovis acuto, & major quovis acuto, ut inter peripheriam, rectamque perpendicularem media recta nequeat intercedere. Ecquid igitur (inquies) reſtat quin ſemicirculi angulus rectus ſit? Certe rectus eſt in ſuo genere, & ſic anguli recti dicuntur in ſphæra, & medius inter obtuſum acutumque ſui generis eſt, & generaliter ita perpendiculum definitum nobis eſt 12 e 2. Angulus rectus ita definitus 8 e 3. Mirabile itaque ſit angulo nihil addi poſſe, quo major acuto fiat, & tamen majorem eſſe, cui nihil præter unicam lineam acceſsit. Datur majus, datur minus, cur non datur æquale? & quidem datur id inter quod & æquale, ne recta quidem poſsit intercedere. Angulum tamen rectum rectilineum majorem eſſe recto circulari, geome

tria con-

tria convincit. Datur igitur in circulo ratio inæqualitatis majoris & minoris, nō datur ratio æqualitatis. Sed multo mirabilius fuerit illud è ratione inſcriptarum, quod detur ratio æqualitatis majoris minoriſque inæqualitatis, non detur tamen proportio, de quo erit in ſcholis.

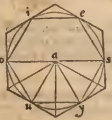
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XVII.

de adſcriptione circuli & trianguli.

Geometria plani rectilinei & circuli adhuc fuit: ſequitur utriuſque aſcriptio: quæ primo libro generaliter definita eſt: peripheria vero circuli eſt ipſius terminus. Itaque rectilineum inſcribitur circulo, quando peripheria tangit angulos, 3 d 4: Circumſcribitur cum à ſingulis lateribus peripheria tangitur: 4 d 4.

1. *Si rectilineum aſcriptum circulo eſt æquilaterum, eſt æquiangulum.*

De inſcripto patet, & quidem de triangulo per ſe, quia ſi eſt æquilaterum, eſt æqui angulum per 2 c 10 e 6. In triangulato autem res demonſtrāda eſt. Ut hic ſi inſcriptæ *o u* & *s y* ſint æquales, ſubtendent peripherias æquales per 19 e 15: tum ſi mediam peripheriam inter utramque omittas, ut hic *u y* & reliquam *o i e s* addas utrique, tota *o i e s y* ſubtenſa angulo ad *u* & *u o i e s* ſubtenſa angulo ad *y* æquabuntur. Itaque anguli in peripheria, inſiſtentes in peripheriis æqualibus æquantur. De inſcripto item verum, ſi circumſcriptus circulus intelligatur. Perpendiculares enim à centro *a* in latera circumſcripti per 5 e 12 facient triangula utrinque æquilatera & æquiangula ductis in angulos radiis, ut in eodem exemplo.

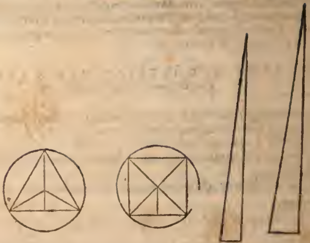


Et

2. *Æquatur triangulo æqualis, baſis quidem perimetro, altitudinis autem perpendiculari à centro in latus.*

Ut hic patet per 1 c 6 e 7. Tria enim ſunt triangula in uno triangulo æqueal-

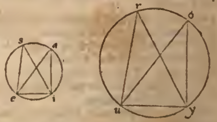
ta. Idem erit de triangulato, ut hic in quadrato: quatuor enim triangula fient æquealta: Denicꝫ rectilineum quodlibet æquilaterum adſcri-



ptum circulo æquabitur triangulo baſis æqualis perimetro ipſius adſcripti, quia perimeter continet baſes triangulorum, in quæ rectilineum reſolvitur.

3. *Rectilinea ſimilia circulis inſcripta, ſunt ut á diametris quadrata.* 1 p 12.

Quia per 1 e 6 plana ſimilia habent duplicatam rationem homologorum laterum. At in rectilineis inſcriptis diametri ſunt homologa latera vel ſunt proportionales lateribus homologis. Ut ſunto rectangula triangula ſimilia *sei*, *ouy*, quia *se* & *ou* ſunt diametri, res protinus patet. At in triangulis obliquãgulis *sei* & *ruy* ſimilibus diametri ſunt proportionales homologis lateribus, nempe *ei* & *uy*. Nam ex theſi ut *se* ad *ru*, ſic *ei* ad *uy*: & ideo ex præcedenti ut diametri *ea* & *uo*. In triangulatis ſimilibus, cum per 2 e 10 reſolventur in triangula ſimilia, idem erit.



Itaque

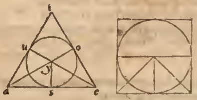
Si ſit ut diameter circuli ad latus rectilinei inſcripti, ſic diameter ſecundi circuli ad latus ſecundi rectilinei inſcripti, triangulisque inſcriptorum ſingularia ſimilia ſimiliterque ſita, rectilinea inſcripta erunt ſimilia ſimiliterque ſita.

Id Euclides ſic ſumpſit ad 2 p 12, & quidem ut videtur é 18 p 6: & nos ideo aſumpſimus. Adſcriptio circuli eſt cum triangulo quolibet: cum triangulato autem

autem duntaxat ordinato, & quidem adſcriptio circuli eſt communis.

4. *Si duæ rectæ biſecent duos angulos dati rectilinei, circulus radii ab earum concurſu in latus perpendicularis inſcribetur dato rectilineo. 4p4.*

Ut in triangulo *aei*, rectæ *ao* & *eu* biſecent angulos, & ab earum concurſu *y* ſunto perpendiculares *yo*, *yu*, *ys*, dico centro *y* radio *yo* vel *yu* vel *ys* deſcribi circulum per c 13 e 15, quia biſecantes cum perpendicularibus faciet triangula æquilatera per 2 e 7, ideoque tres perpendiculares, quæ ſunt baſes æquilaterorum æquales erunt, Idem argumentum erit de triangulato.

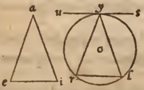


5. *Si duæ rectæ recte biſecent duo latera dati rectilinei, circulus radii ab earum concurſu in angulum circumſcribetur dato rectilineo. 5 p 4.*

Ut in ſuperioribus figuris. Demonſtratio eſt eadem ſuperiori: Tres enim radii per 2 e 7 æquantur, & concurſus per c 13 e 15 eſt centrum. Atque hæc communis eſt adſcriptio circuli, ſequitur adſcripto rectilinei, & primum trianguli.

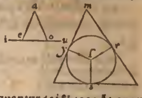
6. *Si duæ inſcriptæ á contactu rectæ & peripheriæ æquent duos utrinque angulos duobus angulis dati trianguli, connexæ inſcribent triangulum dato circulo æquiangulum dato triangulo. 2 p 4.*

Detur triangulum *aei* & *o* circulus cui inſcribendum ſit triangulum æquiangulum dato. Tangat igitur recta *uys* peripheriam *yrl*, & á contactu *y* inſcriptæ *yr* & *yl* æquent cum tangẽte angulos *uyr*, *syl* angulis *aei* & *aie*, & connectatur *rl*, æquabunt per 17 e 16 angulos alternorum ſegmentorum angulis *url* & *yrl*. Itaque per c 3 e 7 cum bini æquentur, reliquus æquabitur reliquo. Circumſcriptio hic etiam ſpecialis eſt.



7. *Si duo anguli in centro dati circuli æquentur ad commune latus exterioribus angulis dati trianguli, rectæ tangentes peripheriam in cruribus angulorum circumſcribent triangulum dato circulo æquiangulum dato triangulo. 3 p 4.*

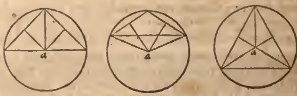
Eſto triangulum, & in eo exteriores anguli *aei* & *aou*: circulus autem *yſr*, & in centro *l* æquentur anguli *ylr* & *ſlr* ad commune latus *lr* angulis exterioribus *aei* & *aou*. Dico angulos circumſcripti trianguli æquari angulis dati trianguli: Nam quadranguli *ylrm* quatuor interiores æquantur quatuor rectis per 4 e 10, duo que ad *y* & *r* ſunt recti per fabricam ex ſecante & cōtigua à contactu per cētrum per 1 c 15 e 15. Itaq; reliqui ad *l* & *m* æquantur duobus rectis, quibus æquantur *aei* & *aeo*: At angulus ad *l* æquatur exteriori, reliquus igitur ad *m* æquatur reliquo *aeo*. Idem erit de angulis *aoe* & *aou*. Itaque tum binis æqualibus reliqui ad *a* & *i* æquabuntur.



Itaque

Si triangulum eſt rectangulum, obtuſangulum, acutangulum, centrum circumſcripti circuli eſt in latere, extra latera, intra latera: & contra.

Ut vides in tribus ſubjectis figuris centrum *a*.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XVIII. *de adſcriptione triangulati.*

Atque hæc trianguli eſt adſcriptio. Triangulati ordinati adſcriptio doceatur, & primum circumſcriptio communis ex antecedente tamen inſcriptione hoc modo.

1. *Si rectæ tangant peripheriam in angulis inſcripti triangulati ordinati, circumſcribent triangulatum circulo homogeneum inſcripto triangulato.*

Exempla per ſpecies inſcriptorum proponentur: ſpecialis itaque inſcriptio dicatur, & quidem per unicum latus, quod repetitum, quoties opus eſt, peripheriam compleat. Id enim fecit Euclides in uno quindecangulo, nos in omnibus faciemus.

2. *Si diametri recte interſecentur, ſubtenſa recto erit latus quadrati. é 6 p 4.*

ut hic.



ut hic. Crura enim anguli erunt radii, quorum diametri connexæ faciẽt quatuor triangula rectangula æqualia cruribus & per 2 e 7 baſibus. Ideoque quadratum inſcribent. Itaque

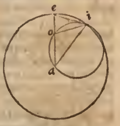
Quadratum inſcriptum eſt dimidium circumſcripti.

Quia latus circumſcripti (quod hic æquatur diametro circuli) poteſt per 5 e 12 duplum ad latus inſcripti. Et

Eſt majus dimidio circumſcripti circuli.

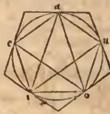
Quia circumſcriptum quadratum, quod duplum eſt, eſt majus toto circulo. Reliquis deinceps multangulis imparilateris inſcribendis opus eſt triangulo, cujus uterque angulus ad baſim ſit multiplus reliqui; in quinquangulo primum duplus, quod ſic habetur.

3. *Si recta ſecetur proportionaliter, trianguli crurum ſectæ æqualium, baſis majori ſegmento æqualis, uterque angulus ad baſim erit duplus reliqui, & baſis erit latus quinquanguli in circulum cum triangulo inſcripti. 10 & 11 p 4.*



Hic primum ad fabricam trianguli ſumes pro radio rectam *ae* per 3 e 14 ſectam proportionaliter in puncto *o*, circulumque facies centro *a* radio *ae*, & per 5 e 15 inſcribes æqualem majori ſegmento, inſcriptamq; cum ſecta connectes. Hoc triangulum erit optatum. Nam per 10 e 6 anguli ad baſim *ei* æquantur, ut quod de altero probatum ſit, probatum quoque ſit de reliquo: tum ducatur recta *oi*, & circulus circumſcribatur per 6 e 17 triangulo *aoi*: hunc circulum tanget recta *ei* per 17 e 15: quia ex theſi recta *ae* ſecatur proportionaliter, ideoque oblongum ſecantis & exterioris ſegmenti æquatur quadrato majoris ſegmenti, cui æquata eſt ex theſi baſis *ei*: Hic igitur angulus *aie* duplus eſt anguli ad *a*, quia æquatur angulis *aio* & *oai* æqualibus inter ſe. Nam per 20 e 16 *eio* æquatur angulo *oai* in alterno ſegmento, & reliquus *aio* æquatur ſibi ipſi. Itaque & angulus *aei* æquatur duobus eiſdem, quia æquatus eſt angulo *aie*. At angulus *eoi* exterior duobus eiſdem æquatur per 2 e 9 e 6. Itaque anguli *ioe* & *oei* (quia æquales eidem) æquantur inter ſe. Quare per 10 e 6 latera *oi* & *ei* æquantur: ideoque & *ao* & *oi*: angulique *oai* & *oia* ſunt æquales per 10 e 6. Quare cum ambobus æquatus ſit angulus *aie* duplus erit alterius æqualium: At baſis *ei* eſt latus quinquanguli æquilateri. Nam ſi

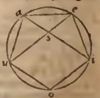
duæ rectæ biſecantes inſcripti trianguli utrumque angulum duplum reliqui cō nectantur, & inter ſe & cum angulis inſcribent circulo quinquangulum æquilaterum, cujus unum latus erit ipſa baſis. Ut hic cum anguli *eoa*, *eoi*, *uio*, *uia*, *iao* æquentur in peripheria, ſubtenſæ peripheriæ per 6 e 16 æquantur, ideoq; per 19 e 15 ſubtenſæ *ae*, *ei*, *io*, *ou*, *ua*: & ex iis quinque lateribus unū eſt *ae*.



Ergo recta proportionaliter ſecta ita quinquanguli adſcriptionem machinatur, indeque viciſſim redditur linea proportionaliter ſecta.

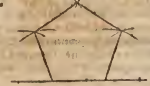
4. *Si duæ rectæ ſubtendunt duos deinceps angulos inſcripti quinquanguli, ſecantur proportionaliter, & majora ſegmenta ſunt latera inſcripti. ex 8 p 13.*

Ut hic ſunto rectæ *ai* & *eu* ſubtendentes angulos *aei*, & *eau*, dico eas proportionaliter ſecari in puncto *s*, & majora ſegmenta æquari lateri quinquanguli. Hic enim bina triangula ſunt æquiangula: primo *aei* & *uae* per theſim & 2 e 7. Itaque anguli *aie* & *aes* æquantur: deinde *aei* & *ase*, quia angulus ad *a* communis eſt, reliquus igitur reliquo æquatur per e 3 e 7. Jam per 9 e 7, ut *ia* & *ae*, id eſt ut mox patebit ad *is*, ſic *ea* ad *as*. Itaque per 1 e 14 ſecatur *ia* proportionaliter: *ea* autem latus æquatur *is*, quia utraque æquatur lateri *ei*, illa per theſim, hæc per 10 e 6. Anguli enim ad baſim *ise* & *ies* æquantur ejuſdē nempe duplicia: quia *ise* per 3 e 9 e 6 æquatur duobus interioribus æqualibus angulo ad *u* per 10 e 6 & proximam concluſionem. Itaque duplus eſt anguli *aes*, cujus etiam duplus eſt angulus *uei* per 6 e 16, inſiſtens nempe in dupla peripheria. Atque hinc patet fabrica quinquanguli ordinati ſuper datam rectam. Itaque



Si data recta ſecta proportionaliter continuetur utrinque majore ſegmento, ſexque peripheriæ radio datæ concurrant, binæ utrinque á terminis datæ & continuatæ, duæ reliquæ ab earum concurſu, rectæ per cōcurſus & terminos datæ conſtituent ſuper datam quinquangulum ordinatū.

Exēplū ſic eſt.

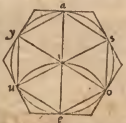


5. Si diameter circuli quinquangulo circumſcripti eſt rationalis, eſt irrationalis ad latus inſcripti quinquanguli, é 11 p 13.

Sic antea ſegmenta rectæ proportionaliter ſectæ irrationalia fuerunt. Reliqua deinde triangulata multiplicata à laterum ternario, quaternario, quinario poſſunt inſcribi circulo per inſcriptum triangulum, quadratum, quinquangulum. Itaque per triangulum inſcribetur triangulatum angulorum 6. 12. 24. 48: per quadratum inſcribetur triangulatum angulorum 8. 16. 32, 64: per quinquangulum inſcribetur triangulatum angulorum 10. 20. 40. 80. & ſic deinceps.

6. Radius circuli eſt latus inſcripti ſexanguli. é 15 p 4.

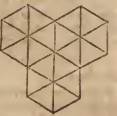
Sexangulum inſcribitur per triangulum æquilaterum inſcriptum biſectis tribus angulis, ſed brevius inſcribitur per radium ſexies deinde inſcriptum: Ut in dato circulo ſit diameter *ae*, & centro *e* radio *ie* deſcribatur peripheria *uio*, & á punctis *o* & *u* ſint diametri *oy* & *us*, hæ connexæ & inter ſe & cum diametro *ae* inſcribent ſexangulum æquilaterum dato circulo lateris radio æqualis: ut *eu* æquatur ipſi *ui*, quia ambæ æquantur eidem *ie* per c 17 e 4. Itaque *eiu* eſt æquilaterum triangulum, & ſimiliter *eio* ęquilaterum, angulique in centro ſunt $\frac{2}{3}$ recti, ideoque æquales, & per 1 c 8 e 5 angulus *sio* eſt $\frac{1}{3}$ duorũ rectorum, & per 2 c 8 e 5 anguli ad verticem item æquales. Quare ſex



ſunt æquales, & ob id per 6 e 16 & 19 e 15 baſes omnes æquales, & inter ſe, & ut jam patuit, radio dati circuli. Inſcriptum eſt igitur ſexangulum é radio circuli æquilaterum, & per 1 e 17 æquiangulum. Itaque

1. Sexangula tria ordinata complent locum.

Ut hic. Sex enim triangula ſunt æquilatera reſolutis ſexangulis in ſex triangula, vel quia quilibet angulus ordinati ſexanguli valet rectum & $\frac{1}{3}$ recti. Itaque triplex angulus ſexanguli valet $1\frac{1}{3}$ recti id eſt quatuor rectos. Præterea vero nulla é planis figura complet locum. Quinquangulum non complet: Triplex enim ejus angulus faceret tantum rectos $3\frac{3}{5}$: quadruplex faceret $4\frac{4}{5}$, quod amplius & majus eſt. Septanguli angulus duplex faceret tantum rectos $2\frac{6}{7}$: triplex $3\frac{9}{7}$ id eſt $4\frac{2}{7}$ quod plus eſt, & ſic deinceps inducenti conſtabit tribus tantum planis ordinatis compleri planum locum. Et



2. Si rectæ ab uno inſcripti ſexanguli angulo in tertium utrinque angulum connectantur, inſcribent triangulum æquilaterum dato circulo.

Ut hic,

Ut hic, quia latera erunt ſubtenſa peripheriis æqualibus. Itaque per 19 e 15 æqualia, & viciſsim per tale tri-



angulum biſectis angulis ſexangulum inſcribitur.

7. *Latus inſcripti trianguli æquilateri poteſt triplum circularis radii.*

12 *p*. 13.

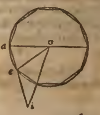
Ut hic trianguli *aei* uno latere *ae* duæ tertiæ ſemiſperipheriæ occupantur: Nā uno latere occupatur una tertia totius peripheriæ *eu*, ideo eſt tertia reliqua, id eſt ſexta totius peripheriæ. Itaq; *eu* inſcripta eſt radius per 6 e. Jam diameter *aou* per 7 e 12 poteſt quadruplum radii, id eſt ipſius *eu* & per 18 e 16 & 5 e 12 quadruplum idem poſſunt *ae* & *eu*: tolle *eu* latus *ae* poterit triplum radii. Atque hæc de ſexangula figura, id eſt apum geometria. Apis enim (ut ait Varro de re ruſtica lib. 13 cap 16) ſexangulam cellam ſibi architectatur, quot habet ipſa pedes, quod geometræ ἰσόγωνον



fieri in orbi rotundo oſtendunt, ut plurimum loci includatur, quod idem Pappus & geometrice & copioſe demonſtrat in proœmio quinti libri. Reliquis multangulis & eorum multiplis opus eſſet triangulo utriuſque ad baſim anguli ad reliquum tripli in ſeptangulo, quadrupli in nonangulo, & ſic deinceps: in cujus inventione veteres geometræ elaborarunt. Quidam (inquit Proclus ad 9 p 1) ab Archimedis helicibus incitati in datam rationem datum angulum rectilineum ſecuerunt, quorum conſiderationes iis qui inſtituuntur contemplatu difficiles, cum ſint in præſentia omittimus. Hæc ille. Geometricos autem conatus illos libuit curioſorum gratia in ſcholis proponere.

8. *Si latus ſexanguli ſecetur proportionaliter, majus ſegmentum erit latus decanguli.*

Pappus lib. 5 th. 24. & Camp. ad 3 p 14. Secetur enim *ao* radius ſeu latus ſexanguli per 3 e 14 proportionaliter, & ſit *ae* æqualis majori ſegmēto. Dico *ae* latus eſſe decanguli: Nam ſi continuetur deinde toto radio in *i* tota *aei* per c 3 e 14 ſecabitur proportionaliter, & majus ſegmentum *ei* erit ipſe radius. Nam ſi recta *iea* ſecta eſt proportionaliter, eſt ut *ia* ad *ie*, id eſt *oa* nempe ad radium, ſic *ao* ad *ae*. Itaque per 11 e 7 triangula *iao* & *oae* ſunt æ-



quian-

quiangula, & angulus *aoe* æquatur angulo *oia*. At angulus *uoe* eſt quadruplus anguli *aoe*: æquatur enim duobus interioribus ad *a* & *e* per 2 c 9 e 6 æqualibus inter ſe per 3 c 5 e 5 & per 10 e 6, & ideo duplus eſt ipſius *aeo* dupli per eandem cauſſam ipſius *aio* æqualis ipſi *aoe*. Itaque *uoe* eſt quadruplus ipſius *aoe*. Itaque *ae* eſt quadrupla peripheriæ *ea*. Ergo tota *uea* eſt quintupla ipſius *ea*, totaque peripheria decupla. Ideoque ſubtenſa eſt latus decanguli. Itaque

Si decangulum & ſexangulum inſcribantur eidem circulo, recta è latere utriuſque continuata ſecabitur proportionaliter, & majus ſegmentum erit latus ſexanguli: & ſi majus ſegmentum rectæ proportionaliter ſectæ eſt latus ſexanguli, reliquum erit latus decanguli. 9 p 13.

Comparatio ſequitur decanguli & ſexanguli cum quinquangulo.

9. *Si decangulum, ſexangulum, quinquangulum inſcribantur eidem circulo, latus quinquanguli poteſt latera reliquorum: & ſi recte poteſt latera ſexanguli & decanguli, eſt latus quinquanguli.* 10 p 13.

Eſto latus inſcripti quinquanguli *ae*, ſexanguli *ei*, decanguli *ao*. Dico latus *ae* poſſe reliqua. Sunto enim perpendiculares duæ, prima *io*, ſecunda *iu* biſecantes latera quinquanguli & decanguli, & concurſus ſecundæ perpendicularis cum latere quinquanguli ſit *y*. Demonſtrationis ſyllogiſmus eſt hic. Oblonga è latere quinquanguli & ejus ſegmentis æquantur quadratis reliquorum laterum: ſed quadratum ex eodem toto latere æquatur oblongis è toto, & ſegmentis per 3 e 13: æquatur igitur & quadratis reliquorū laterum. Demonſtretur ſyllogiſmi propoſitio. Hæc enim



pars ſola dubia eſt. Duo igitur triangula *aei* & *yei* ſunt æquiangula communi angulo ad *e* item æqualibus *eai* & *eiy* dimidii nempe ejuſdem *eis*, quia ille eſt per 10 e 6, alter duorum æqualium, quibus *eis* exterior æquatur 2 c 9 e 6: & hic in dimidiam peripheriam inſiſtit. Nam ſemiperipheria *als* æquatur ſemiperipheriæ *ars*, item *al* ipſi *ar*. Reliqua igitur *ls*, reliquæ *rs*, & tota *rl* dupla eſt ipſius *rs*: Ideoque *er* dupla eſt ipſius *eo*: & *rs* dupla ipſius *ou*. Nam biſegmenta patent per 7 e 15 & 9 e 16. Itaque peripheria *ers* dupla eſt peripheriæ *eou*, & ideo angulus *eiu* eſt anguli *eis* per 6 e 16 dimidius: bini igitur anguli duorum triangulorum æquantur. Itaque reliquus per c 3 e 7 reliquo. Quare per 9 e 7, ut latus *ae* ad *ei*, ſic *ei* ad *ey*. Itaque per 4 e 12 oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ. Jam connectantur *oy*, duo ruſus triangula *aoe* & *aoy* æquiangula ſunt communi angulo ad *a*, itemque *aoy* & *oea* ideo æqualibus, quia ambo æquantur angulo ad *a*, ille per 10 e 6, hic per 2 e 7, quia perpendicularis biſecans latus decanguli facit duo triangula æquicrura & æqua recto angulo crurum: ideoque æquiangula. Itaque ut *ea* ad *ao*, ſic *ea* ad *ay*. Quare per 4 e 12 oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ, propoſitioque ſyllogiſmi vera eſt, quod demonſtraſſe oportuit. Converſam huic manifeſtam uſurpat Euclides 16 p 13.

10. *Si triangulum & quinquangulum inſcribantur eidem circulo ad idem punctum, recta inſcripta inter utriuſque baſim dicto puncto oppoſitam erit latus inſcripti quindecanguli.16 p 4.*



Latus enim tri anguli ſubtendet $\frac{1}{3}$ totius peripheriæ: duo latera quinquanguli ſubtendent $\frac{2}{5}$, é quibus ſi tollas $\frac{1}{3}$ relinquetur $\frac{1}{15}$. *Itaque*

Si quinquangulum & ſexangulum inſcribantur eidem circulo ad idem punctum, peripheria inter utriuſque latera erit pars triceſima totius peripheriæ.



Ut hic: itaq; triangulatorũ ordinatorum quadrati, quinquanguli, ſexanguli, decanguli, quindecanguli inſcriptio prompta erit latere unico, quod repetitum quoties opus eſt, peripheriam totam ſubtendat.

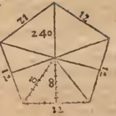
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XIX.

de geodæſia multanguli ordinati & circuli.

EX adſcriptione circuli & rectilinei geodæſia ducitur multangulorũ ordinatorũ, atque imprimis ipſius circuli. Concurſus enim biſecantiũ duos angulos eſt centrum circumſcripti circuli, ab eoque ad angulum radius, tumq; ſi quadratum é dimidio lateris tollatur é quadrato de radio, latus reliqui erit perpendicularis per 5 e 12. Itaque ſpeciale theorema hic ita inſtituitur.

1. *Planus é perpendiculari á centro in latus & dimidio perimetri, eſt area multanguli ordinati.*

Ut hic quadratum é 10 radio eſt 100, quadratum é 6 dimidio lateris 12 eſt [illegible],
quo ſi[illegible]c



quo illinc deducto reliquum 64 eſt quadratum perpendicularis, cujus latus 8 eſt ipſa perpendicularis, ex qua & 24 dimidio perimetri planus eſt 240 area quinquanguli. Demonſtratio hic etiam eſt certæ illius antecedentis cauſſæ. Nam de quinque triangulis in quinquangulo planus é perpendiculari & dimidio baſis eſt unum, ut ante patuit, quintuplex igitur facit totum: Atqui illa multiplicatio eſt perpendicularis per ſemiperimetrum. In ſexangulo ordinato etiam radius per 4 e 18 notus eſt é latere ſexanguli: Ut hic quadratum é radio 6 & 36, quadratum é 3 dimidio lateris eſt 9, quo illinc ſubducto reliquum eſt 27 quadratum perpendicularis: latus eſt $5\frac{2}{11}$ perpendicularis ipſa ex qua & 18 ſemiperimetro planus eſt $93\frac{3}{11}$ area ſexanguli. Denique in omnibus multangulis ordinatis theorema ſatisfaciet. Atque hæc geodæſia eſt multanguli ex adſcriptione, unde etiam eſt dimenſio circuli, τετραγωνισμὸς quadratura circuli vulgo dicitur: argumentum geometris omnium fere ætatum propoſitum, in quo ſeſe exercerent. Bryſo, Antipho, Euclides, Archimedes, Apollonius, Porus, atque é recentioribus Boetius, Campanus, Cuſanus, Regiomontanus, Orontius hic elaboravere. Quidam etiam τετραγωνισμὸν impoſsibilem credidere. Quæſtionis nodus eſt in ratione diametri & peripheriæ.



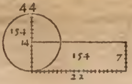
2. Peripheria eſt tripla diametri & fere ſeſquiſeptima.

Hæc ratio ut apud Heroné eſt Euclidi & antiquis geometris nota fuit. Quod enim tripla ſit, ſex radii, id eſt tres diametri indicant, quibus peripheria per 6 e 18 eſt circumſcripta, & ideo quia continens major, ſed exceſſus non plané eſt ſeſquiſeptima. Deeſt enim unitas unius ſeptimæ, & exceſſus idem longe major eſt quam ſeſquioctava. Itaque quia differentia vicinior erat ſeſquiſeptimæ, aſſumpta eſt ſeſquiſeptima: vero quippe propinquum pro ipſo vero. Demonſtratio Archimedis valde operoſa eſt: ſi quis tamen curioſius requirat, materiam exercendi ingenii prorſus Archimedeam é ſcholis accipito.



1. Planus é radio & peripheriæ dimidio eſt area circuli.

Hic enim 7 radius é dimidio diametri 14 multiplicans 22 dimidium peripheriæ 44 facit 154 oblongum: in diametro autem duo latera



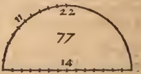
oppoſita, item in perimetro duo reliqua oppoſita rectanguli continentur. Itaque binorum dimidia duntaxat aſſumuntur, à quibus comprehenditur rectangulum. Et

2. Ut 14 *ad* 11, *ſic quadratum diametri ad circulum.*

Hic enim tres proportionis termini dantur poteſtate: quartus multiplicatione tertii per ſecundum & facti diviſione per primum invenitur, ut hic quadratum è diametro 14 eſt 196. quo per 11 multiplicato factus 2152 dividatur per 14, quotus erit 154 pro quæſito circulo, quod è dimenſis quadrato & circulo per analyſin naſcitur. Nam ratio 196 ad 154 eſt ratio 14 ad 11, ut reductis terminis apparet. Hic vero ſecundus τετραγωνισμὸς Euclidis eſt apud Heronem, ſed paulo ſecus propoſitus hoc modo. Si de quadrato diametri tollantur $\frac{3}{14}$, relinquetur area circuli: ut ſi 196 quadratum dividatur per 14, quotus erit item 14, quæ ter ſumpta ſunt 42, & ſublata de 196, relinquunt 154 quadratum æquale circulo. Quadratura igitur Euclidis iſta Archimede antiquior eſt, & jucundum ſit ab antiquis geometris iſtam geodæſiam repetere, & tot Euclideis exemplis demonſtrare geodæſiam geometrarum ingeniis nequaquam alienã eſſe: ſed demonſtratio rationis inventa ab Archimede laudem rationis etiam archimedeam fecit. Ex eadem illa peripheriæ & diametri ratione naſcitur dimenſio circularium partium ſemicirculi, ſectoris, ſectionis, majoris minoris. Et

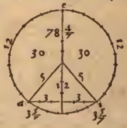
3. *Planus è radio & peripheriæ quadrante eſt area ſemicirculi.*

Ut hic vides: factus enim à 7 radio multiplicãte 11 quadrante facit 77. Poteſt & iſta dimenſio fieri ſumpto dimidio dimenſi jam circuli. Et



4. *Planus è radio & baſis dimidio eſt area ſectoris.*

Hic tres ſunt ſectores ae baſis 12 pedum, ei item 12 pedũ, reliquus ia $7\frac{3}{7}$, diameter 10, multiplica 5 per 6 factus erit 30 pro primo ſectore, quãtus erit & ſecundus: multiplica item 5 per $3\frac{5}{7}$, quotus erit $18\frac{4}{7}$, è quibus additis redditur circulus $78\frac{4}{7}$. Et



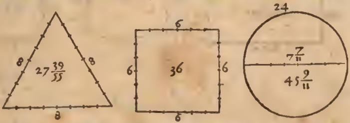
5. Si trian-

5. *Si triangulum é duobus radiis & baſi majoris ſectionis addatur duobus in ea ſectoribus, totum erit area ſectionis majoris: ſin detrahatur ſuo ſectori reliquum erit area minoris.*

Adde ad ſectores *a e*, & *e i* triangulum, ut in eodem exemplo *a o i* pedum 12, totus erit 72 area majoris ſectionis, tollatur idem de $18\frac{4}{7}$ tertio ſectore, $6\frac{4}{7}$ reliquum erit area minoris ſectionis.

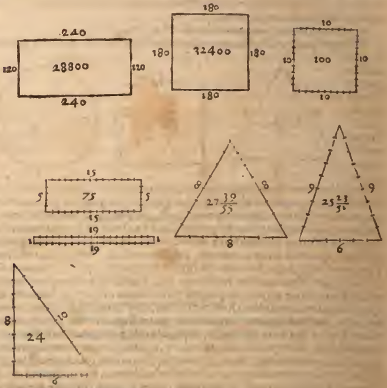
6. *Circulus é planis iſoperimetris inæqualibus eſt maximus.*

Quippe qui ſit ordinatiſsimus & terminatiſsimus, ut circulus *a* perimetri 24 eſt major rectilineo iſoperimetro, ut quadrato e triangulo *i*.



Atque omnino reliquis iſoperimetris rectilineis. Qua de re lubet Quintiliani locum 10 cap. 1 lib adverſus ψευδογραφίας adjungere, ut pudeat rhetori geometriæ uſum tam elegantem notum eſſe, qui pleriſque ſummis hominum opinione philoſophis plane ſit ignotus. Quis (ait) non ita proponenti credat? Quorum locorum extremæ lineæ eãdem menſuram colligunt, eorum ſpatium quoque, quod his lineis continetur, par ſit neceſſe eſt? At id falſum eſt. Nam plurimum refert, cujus ſit formæ ille circuitus, reprehenſique à Geometris ſunt hiſtorici, qui magnitudines inſularum ſatis ſignificari navigationis ambitu crediderunt. Nam ut quæcunq; forma perfectiſsima, ita capaciſsima eſt: Ideoque illa circumcurrens linea ſi efficiet orbem, quæ forma eſt in planis maxime perfecta, amplius ſpatium complectetur, quam ſi quadratum paribus oris efficiat. Rurſus quadrata triangulis, triangula ipſa plus æquis lateribus quam inæqualibus. Sed alia forſitan obſcuriora, nos facillimum etiam imperitis ſequamur experimentum: Jugeri menſuram, ducentos & quadraginta longitudinis pedes eſſe, dimidioque in latitudinem patère non fere quiſquam eſt, qui ignoret: & qui ſit circuitus, & quantum campi claudat colligere expeditum. At centeni & octogeni in quamque partem pedes, idem ſpatium extremitatis, ſed multo amplius clauſæ quatuor lineis areæ faciunt. Id ſi computare quem piget, brevioribus numeris idem diſcat: Nam deni in quadram pedes, quadraginta per oram, intra centum erunt. At ſi quindeni per latera, quini in fronte ſint: ex illo quod amplectuntur, quartam deducent eodem circumductu. Si vero porrecti utrinque undeviceni ſingulis diſtent non plures intus quadratos habebunt, quam per quot longitudo ducetur: quæ circumibit autem linea, ejuſdem ſpatii erit cujus ea quæ centum continet. Ita quidquid formæ quadrati detraxeris, amplitudini quoque peribit. Ergo etiam id fieri poteſt, ut majore circuitu minor loci amplitudo claudatur. Hoc in planis. Nam in collibus

vallibuſque etiam imperito patet plus ſoli eſſe quam cæli: Exempla rem ſubjiciunt oculis.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XX.

de ſuperficie gibba.

Gibbum eſt ſuperficies quæ inæqualiter intra ſuos terminos interjacet.

Superficies plana adhuc ampliſsime propoſita eſt, ex cujus contrario gibba poſsit intelligi: atque ut antea planum pro ſuperficie plana, ſic modo gibbum pro ſuperficie gibba dicatur: nec tamen gibbum quodlibet modo definitur, ſed quod ſectum plano baſi parallelo faciat communi ſectione peripheriam. Id ſi lubet regulare nominetur.

2. *Gibbum eſt ſphæricum aut varium.*

Partitio reſpondet partitioni lineæ in peripheriam & helicem.

3. *Sphæricum eſt gibbum æquidiſtans á centro comprehenſi ſpatii.*

Sic antea peripheria definita eſt, nominatur autem ſphæricū á ſphæra inopia verbi, cum ſphæra potius á ſua ſuperficie nominari debuerit, ut planum corpus á plana ſuperficie dicetur, quæ nominis hyſterologia erit in ſuperficie conica & cylindracea. *Itaque*



Fit converſione ſemiperipheriæ manente diametro. é 14 d 11.

Ut hic ſi ſpatium inter peripheriam & diametrum inane cogites. Atq; ut recto motu lineæ rectæ efficitur planum, ſic motu peripheriæ efficitur ſphæricum: Atque ut locis omnibus recta in plano, ſic peripheria in ſphærico duci poteſt.



4. *Maxima in ſphærico peripheria eſt quæ ſphæricum biſecat.*

Quæ de rectis in circulo præcipiuntur, eadem fere huc referuntur, & quidem circulorum ſphæræ inſcriptorum nomine, qui cum ſphæra in plano conſiderantur, lineis etiam adumbrantur, & tamen qui circuli in ſphæra conſiderantur, peripheriæ revera ſunt in ſphærico. Sic igitur Euclides 17 p 13 poſtulat maximum ſphæræ circulum eſſe, qui tranſit per centrum, id eſt qui ſphæram biſecat. Maxima itaque peripheria ſphærici reſpondet diametro circuli. *Itaque*

Peripheria propior maximæ eſt major remotiore, & utrinque æquidiſtantes á maxima duæ ſunt æquales.

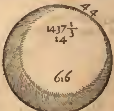
Simillima

Simillima enim hic repeti poſsũt iis quæ 12. 13. 14 e 15 proponuntur, ut hic.



5. Planus é maxima peripheria & ejus diametro eſt ſphæricum.

Geodæſia ſphærici & ſphæricorum ſegmentorum analogia quadam reſpondet geodæſiæ circulari. Sic igitur planus ſphærici é diametro 14 & peripheria 44 eſt ſphæricum 616. Sic antea circuli area eſt dimenſa per rectãgulũ é tum dimidio diametri, tum peripheriæ. Hic vero per



totam & diametrum & peripheriam efficitur rectangulum prioris quadruplũ pro menſura ſphærici, quia per 1 e 6 plana ſimilia qualia hic cogitantur é dimidio & diametri & peripheriæ, é que tota & diametro & peripheria, ſunt in duplicata ratione homologorum laterum. Itaque

1. Planus é maximo circulo & 4 eſt ſphæricum.

Conſectarium patet ex elemento proximo. Archimedes de ſphæra demonſtrat, ſed præpoſtere é conis ſphæricum æquari quatuor maximis circulis. Et

2. Ut 7 ad 22, ſic quadratum diametri ad ſphæricum.

Nam 7 & 22 duo ſunt termini minimi in ratione diametri ad peripheriam: in circulo autem ut 14 ad 11, ſic quadratum diametri ad circulum. Analogia reſpõdet, quia hic multiplicas per duplum, & dividis per dimidium: Illic contra multiplicas per dimidium, dividis per duplum. Itaque illic circulus ſimplex efficitur, hic quadruplus. Hæc igitur analogia eſt circuli & ſphærici, ex qua etiam eſt hemiſphæricum, ſectio major, minor. Et

3. Planus é maxima peripheria & radio eſt hemiſphæricum.

Ut hic erit 308.

6. Si quota pars eſt radii perpendicularis á centro ad baſim ſectionis majoris, tanta augeatur hemiſphæricum, totum erit ſphærici major ſectio: ſin tanta minuatur, reliquum erit minor.

Ut in

Ut in exemplo pars radii tertii, id eſt $\frac{3}{7}$ eſt à centro, quanta pars hemiſphæri-ci 308 eſt 132. Additis igitur 132 ad 308 cõ-ponẽtur 440 pro ſpherici majore ſectio-ne: Detractis autem relin-quentur 176 pro ſphærici minore ſectione.



7. *Varium eſt gibbum, cujus baſis eſt peripheria, latus recta á termi-no verticis in terminum baſis.*

Hæc affectio duplex eſt communis ſuperficierum variarum regularium: ut patet 18.20.21.23 d 11. Infinitæ vero ſunt ſpecies ut helicis, ſic varii, ſed ab Eucli de ex omni numero, duæ ſpecies ſelectæ ſunt, quas generali affectione comple ctimur.

8. *Varium eſt conicum aut cylindraceum.*

Hæ nimirum geometris ſpecies duæ placuerunt: atque ut antea planum & ſphæricum pro ſuperficie plana & ſphærica, ita modo conicum & cylindrace-um pro ſuperficie conica & cylindracea intelligantur.

9. *Conicum eſt quod á ſubjecta peripheria æqualiter faſtigiatur ad verticem.*



Fit converſione lateris circa ſubjectam peripheriam.

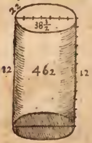
Quod ab Apollonio propoſitum primo conicorum repetitur à Proclo ad 4 d 1.

10. *Planus é latere & dimidio baſis eſt conicum.*

Ut in exemplo ſuperiore latus eſt 13, ſemiperipheria $15\frac{5}{7}$, unde planus eſt $204\frac{2}{7}$

ſuperficies conica: cui ſi addideris ſubjectum circulum, tota ſuperficies conſtabit. Quæ vero de primarum figurarum æqua altitudine & reciprocatione dicta ſunt, conicis etiam poſsint attribui, indeque cylindraceis, tametſi ab Euclide hæc prætetita ſint in ſuperficie.

11. *Cylindraceum eſt quod á ſubjecta peripheria ad ſublimem æqualem & parallelam peripheriam æqualiter erigitur.*



Itaque

Fit converſione lateris circa duas peripherias æquales & parallelas.
Hoc enim modo fabricatur Serenus.

12. *Planus é ſua baſi & altitudine eſt cylindraceum.*

Ut hic peripheria 22, ut colligitur é 7 diametro, altitudo 12. Planus igitur cylindracei eſt 462, quibus ſi addideris duas utrinque baſes, bis nempe 38½ vel 77, tota ſuperficies erit 539. Quamobrem hæc paucula ſunto de ſuperficie gibba.

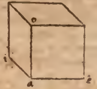
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXI.
de lineis & ſuperficiebus in ſolido.

HActenus geometria fuit de linea & ſuperficie: ſupereſt ſtereometria pars artis altera de corpore: ſtereometria eſt in elementis exigua, & Plato 7 de repub. conqueritur hanc ſcientiam nondum inventam, & quidem duabus de cauſsis, quia difficilis, quia contempta: ideoque publicis honoribus & præmiis excellentia ingenia excitanda ad tantæ rei indagationem. Itaque Platonis velut authoritate permoti Archimedes, Theodoſius, Apollonius, Serenus, Pappus in vacuas poſſeſsiõis hujus partes ingreſsi mirabiles ſtructuras fecere: Archimedes in libris de ſphæra & cylindro, de conoidibus, ſphæroidibus, quadratura parabolæ, Theodoſius in libris de ſphæra, Apollonius in libris de conicis, Serenus in libris de ſectione cylindri, Pappus in variis pleriſque, unde Euclidis inopia poſsit expleri.

1. *Corpus eſt lineatum latum & altum.* 1 d 11.

Longitu-

Longitudo enim ſola eſt lineæ, longitudo & latitudo eſt ſuperficiei, longitudo, latitudo, altitudo ſimul eſt corporis, & hæc magnitudinis trina perfectio eſt corporis, qua intelligimus in corpore non ſolum lineas longitudinis & ſuperficies latitudinis, ſic enim corpus é lineis & é ſuperficiebus conſtaret, ſed ſoliditatem in longũ, latum, altum concipim⁹. Pars enim corporis quælibet etiam corpus eſt. Itaque etiam ſolidum pro corpore ipſo intelligimus: ut in corpore *aeio*



longitudo eſt *ae*, latitudo eſt *ai*, altitudo eſt *ao*.

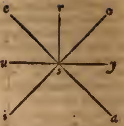
2. *Terminus ſolidi eſt ſuperficies.* 2 *d* II.

Terminus lineæ eſt punctum, neque punctum tamen eſt linea aut lineæ pars ulla, terminus ſuperficiei eſt linea, neque tamen linea eſt ſuperficies, aut ſuperficiei pars ulla, ſic modo terminus corporis eſt ſuperficies: neque ſuperficies tamen eſt corpus aut corporis pars ulla: aliud eſt magnitudo, aliud terminus magnitudinis: ut patuit 5 e 1: ut vero lineæ planæ jam dictæ ſunt quæ ſpectantur in plano, ſic ſolidæ & lineæ & ſuperficies appellantur, quæ conſiderantur in ſolido, earumque perpendiculum & parallelismus é ſimplicibus lineis repetuntur.

3. *Si recta eſt rectis in ſubjecto plano interſectis perpendicularis in cõmuni ſectione, eſt perpendicularis ſubjecto plano: & ſi eſt perpendicularis plano, eſt rectis in ſubjecto plano interſectis perpendicularis in communi ſectione. e' 3 d & 4 p* II.

Perpendiculum lineis in ſuperficie conſideratis attributum eſt antea. Itaque inde repetitur conſectarium de perpendiculo lineæ cum ſuperficie ipſa. Duæ lineæ ſunt perpendiculares, quarum altera in alteram incidens æqualiter interjacet, & eadem definitione intelligimus ſublimem lineam infinitis lineis in plano interſectis incidentem in communi puncto perpẽdicularem eſſe ipſi plano, quia æqualiter in omnes partes interjaceat, & ſingulis interſectis lineis concipimus ſingula plana cum ſublimi communia, ut ſublimis & quælibet interſectarum ſint in eodem plano perpendiculares, ſublimiſque linea plano ſubjecto ideo ſit perpendicularis, quia in eodem puncto eſt perpendicularis omnibus rectis quacumque parte ſumptæ fuerint: ut ſi cogites rectas *ae*, *io*, *uy*, in ſubjecto plano interſectas in communi ſectione *s*: & ſublimem *sr* ſingulis eſſe perpendicularem in communi puncto *s*, exemplum habebis conſectarii. Itaque

 perpendi-



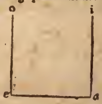
perpendiculum lineæ ad planum ſubjectum eſt é lineis in uno plano,& conſectarium modo eſt é principe illa definitione reciprocum, neque linearum numerus hic certus definitur. Nam ſi de duabus eſt verum, eſt omnino verum de infinitis : quatuor enim anguli recti ſubjectarum cum ſublimi æquabilẽ ſtatum demonſtrabunt. Intelligatur tamen minimũ de duabus ſubjectis in communi puncto perpendiculum. Communis autem ſectio linearum hic punctum dicitur, ut dicitur ab Euclide nominatim ad 4 & 5 p 11.

4. *Si tres rectæ interſectæ ſunt eidem rectæ perpendiculares in communi ſectione, ſunt in eodem plano. 5 p 11.*

Ex perpẽdiculo enim & communi ſectione intelligitur æqualis in omnes partes ſtatus, proptereaque planicies eadem : ut in ſuperiore exemplo *as, ys, os* ſint eidem ſublimi *sr* perpendiculares, erunt in eodem ſubjecto *aiueoy*. Atque hæc de perpendiculo ſublimi, unde contraria obliquitas intelligitur vel inclinationis in angulo acuto, vel declinationis in obtuſo, quæ eſt 5 & 6 d 11: item ſimilium inclinationum ex æqualibus angulis quæ eſt 7 d 11: parallelismus conſequitur, qui tametſi permiſcetur cum ſolido perpendiculo, conſideratur tamen ſemper in uno plano.

5. *Si duæ rectæ ſunt perpendiculares ſubjecto plano, ſunt parallelæ: & ſi parallelarum altera eſt perpendicularis ſubjecto plano, reliqua eſt eidem perpendicularis. 6. 8 p 11.*

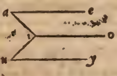
Cauſſa eſt é prima lege paralleliſmi. Nam ſi duæ rectæ ſunt eidem ſubjecto plano perpendiculares, connexæ recta interiores angulos æquabunt duob. rectis, proptereaque parallelæ erunt per 12 e 5: & ſi in parallelis connexis alter interior angulus rectus ſit, reliquus etiam rectus erit, quia communi perpendiculo dividuntur: ut in exemplo. Si anguli ad *a* & *e* ſunt recti, *ai* & *eo* ſunt parallelæ, & contra ſi parallelæ ſint *ai* & *eo*, & angulus ad *a* ſit rectus, etiam ad *e* rectus erit.



6. *Si rectæ in diverſis planis ſunt ad eandem rectam parallelæ, ſunt inter ſe parallelæ. 9 p 11.*

ut hic

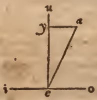
Ut hic ſint rectæ *ae* & *uy* in diverſis planis ad *io* parallelæ, erunt inter ſe parallelæ. Nam á puncto *i* perpendiculares per 9 e 5 ſunto *ia* & *iu*. Itaque per 3 e *o i* cum ſit perpendicularis duabus



interſectis *ia* & *iu*, eſt perpendicularis ſubjecto plano. Ergo per 6 e *yu* & *ea* ſunt perpẽdiculares eidem plano, ideoque per idem ſunt parallelæ. Hæc Euclidis eſt demonſtratio: poſtulari tamen id potuit.

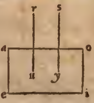
7. *Si duæ rectæ ſint perpendiculares, prima á ſublimi puncto in rectam ſubjectam, ſecunda á communi ſectione in ſubjecto plano, tertia á dicto puncto perpendicularis ſecundæ erit perpendicularis ſubjecto plano.* é 11 *p* 11.

Conſectarium eſt é 3 e. Ut ſi á puncto ſublimi *a* ſit per 10 e 5 perpendicularis *ae* in e punctum ſubjectæ rectæ *io*, & ab e communi ſectione per 9 e 5 ſit altera perpendicularis *eu*, denique *ay* ſublimis recta ſit per 10 e 5 perpendicularis in *eu* ad punctum *y*, *ay* perpendicularis erit ſubjecto plano. Nam quod *ae* perpẽdicularis eſt ipſi *io* ipſa *ae*, neq; dextrorſum neq; levorſum acclinat per 10 e 2. & quod iterum *ay* perpendicularis ipſi *eu*, neque prorſum neque retrorſum pendet. Itaque in quatuor partes interjacet æqualiter. Denique ſi recta *io* paribus angulis congruat ipſis *r* tertium elementum redierit.



8. *Si recta á dato ſubjecti plani puncto ſit parallela rectæ ad idem planum perpendiculari, erit etiam perpendicularis ſubjecto plano.* ex 12 *p* 11.

Ut eſto planum *aeio*, & datum punctum in eo ſit *u*, unde ſublimis perpendicularis ſit erigenda, fiat á puncto *y* perpendicularis *ys* in ſubjectum planum per 7 e, & ei parallela ſtatuatur *ur* per 3 e 12 e 5. Jam *ur*, cum ſit parallela perpendicu



lari in ſubjectum planum, erit eidem per 6 e perpendicularis. Sic igitur eſt perpendiculum & parallelismus ſolidarum rectarum: ſequitur de planis ſolidis utrumque.

9. *Si recta in altero interſectorum planorum perpendicularis communi ſectioni eſt perpendicularis reliquo, plana ſunt perpendicularia: & ſi plana ſunt perpendicularia, recta in altero perpendicularis communi ſectioni eſt perpendicularis reliquo.* é 4 d & 38 p 11.

Perpendiculum planorum é proxima perpendiculi ratione ducitur, planorumque inter ſe æqualis utrinque ſtatus eſt é rectæ in planum perpendiculo, quia hinc intelligitur planum ipſum æqualiter in omnes partes lineis rectis nēpe ſignificatas interjacere, quod in libro duabus utrinque paginis aperto percipitur é verſibus paginarum ſectioni & ſubjecto plano perpendicularibus: ut hic vides. Hic igitur duo ſunt, ut prius communis ſectio & planum: antea ut recta ſublimis eſſet perpendicularis ſubjecto plano, cadebat in communem ſectionem duarum rectarum, & perpendicularis erat rectis in ea interſectis. Hic perpendiculum ejuſdem rectæ duplex exigitur, primum in cōmunem ſectionem, quæ eſt non punctum ut prius in lineis, ſed linea recta, terminus eſt linea, & planicies ipſa prius explorata eſt intra duas rectas. Secundum eſt in ſubjectum planum.



10. *Si recta eſt perpendicularis plano, omnia per eam plana, ſunt eidem perpendicularia: & ſi duo plana interſecta ſunt alicui plano perpendicularia, communis ſectio eſt eidem perpendicularis.* é 15 & 19 p 11.

Hæc elementa ſeparatim ab Euclide proponuntur & citantur: Prius tamen eſt conſectarium 9 e, & poſterius ex eo patet, quod communis ipſa ſectio ſit recta in quolibet interſectorum ſublimium planorum perpendicularis & communi ſectioni, & ſubjecto plano. Nam ſi communis ſectio non eſſet ſubjecto plano perpendicularis, neque interſecta plana eſſent ſubjecto plano perpēdicularia, ſed aliquod eſſet obliquum contra theſim: Ut hic vides. Atqui hoc perpendiculum eſt planorum, parallelismus ſupereſt.





11. *Plana*

11. *Plana ſunt parallela quæ nuſquam annuunt.* 8 d 11.

Paralleliſmus planorum è non concurſu verus eſt, ſicut rectarum in eodem plano ad 11 e 5, quamvis linearum omnium nequaquam ſit, quales in conico aſymptotas propoſuimus primo libro. In parietibus & tabulatis ædium æquidiſtantibus paralleliſmus planorum agnoſcitur. Et

12. *Quæ communi perpendiculo dividuntur.* 14 p 11.

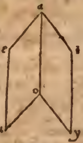
Conſectarium eſt è 3 & 6 e. Nam ſi media recta eſt perpendicularis utrique plano, eſt etiã rectis utrinque interſectis perpẽdicularis in communi ſectione, & recti utrinque interiores anguli paralleliſmum cõvincent. Eſt item è definitione ipſa paralleliſmi ad 11 e 2.



Et

13. *Si binæ rectæ in ipſis conterminæ, ſunt parallelæ.* 15 p 11.

Tales ſunt oppoſiti parietes in faſtigio ædium. Ut ſunto eai & uoy plana quæ habeant binas rectas ea & ia, item uo & ys conterminas in a & o & parallelas nempe ea contra uo & ia cõtra yo: Dico plana ipſa parallela. nam rectæ ue & oa, item yi & oa connectant æquales parallelas, erunt per 6 c 12 e 5 æquales & parallelæ, & ſic paralleliſmum & æquidiſtantiam indicabunt. Idem vero fuerit ſi conterminas cogites infinite extendi, plana quoque extenſa erunt infinite parallela.



14. *Si duo plana parallela ſecantur plano, communes ſectiones ſunt parallelæ.* 16 p 11.

Ut hic vides plana parallela aeio & uyſr ſecta per planum lyrf, communes ſectiones

ſectiones l j & f r erũt parallelę, ſecus ipſæ, ideoq; & plana in quib.



ſunt, concurrent, ut in puncto f contra theſim.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXII.

de pyramide.

Stereometria rectarum & planorum ita eſt: ſequitur ſolidorum ipſorum ſtereometria.

1. *Axis ſolidi eſt diameter circa quam convertitur é.* 15.19.22 d 11.

Axis vulgo putatur eſſe proprius ſphæræ: Ut hic ae: verum etiam attribuitur cono & cylindro, & ſolido plano, & ordinatis tetraedro, hexaedro, octaedro, icoſaedro, dodecaedro, & converſionis motus nominatim exprimitur, ut hic motus geometricus intelligatur: & ſic axis in conoidibus & ſphæroidibus dicitur.



2. *Solidum rectum eſt cujus axis eſt perpendicularis centro baſis.*

Sic conus, ſic cylindrus rectus Apollonio & Sereno definiuntur, & hos ſolos Euclides conſideravit: imo ſolidum nullum niſi rectum geodæſia ſuſcipit. Itaque generaliter de omni ſolido id intelligi poteſt: & aptius eſt ad Euclidis ſtereometriam.

3. *Si ſolida comprehenduntur á ſuperficiebus homogeneis æqualibus multitudine & magnitudine, ſunt æqualia.* 10 d 11.

Aequalitas linearum & ſuperficierum nullo præcipuo axiomate inſtructa eſt, ſed præſumpta eſt ex logico & communi ſenſu, & in pleriſque ἐφαρμόσεσιν illic ſatis

lic ſatis eſſe potuit. Hic vero ἐφάρμοσις corporum fit per ſuperficies. Euclides tãtum de planis loquitur, ſtereometria tamen de quibuslibet ſolidis vera eſt. Duo cubi ſunt æquales, quorum ſenæ ſuperficies planæ ſunt æquales: duæ ſphæræ ſunt æquales, quarum ſuperficies ſunt æquales: duo coni cylindrique ſunt æquales, quorum ſuperficies ſuperficiebus, baſes baſibus ſunt æquales: neque tamen hinc dixeris iſoperimetra ſolida quælibet eſſe æqualia: fallere enim poſſit in heterogeneis, neque id modo poſtulatur, ſed ex æquali ſuperficierum & multitudine & magnitudine æqualitas ſolidorum dijudicatur.

4. *Si ſolida comprehenduntur á ſuperficiebus multitudine æqualibus & ſimilibus ſunt ſimilia.* 9 d 11.

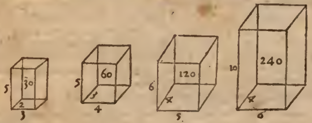
Conſectarium eſt é generali definitione ſimilium figurarum ad 14 e 4. figuræ enim ſimiles illic definitę ſunt æquiangulæ & proportionales cruribus æqualium angulorum: At in ſolidis planis ſimilibus anguli æquantur ex ſimilitudine planorum ſimilium, & crura æqualia ſunt ipſæ planæ ſuperficies, & ideo proportionales, æquales, & ſimiles.

5. *Solida ſimilia habent triplicatam rationem homologorum laterum, & duo media proportionalia.* 33 p 11. 8 p 12.

Conſectarium eſt 15 e 4. ut exemplum repetitum indicabit.

6. *Solidum eſt planum vel gibbum.*

Differentiæ planorum à terminis ſuis aſſumptæ ſunt, à lineis enim rectis & obliquis rectilinea & obliquilinea facta ſunt, ita corporum differẽtiæ ſunt à ſuis item terminis, inde plana vel gibba nominantur.



7. *Planum, quod comprehenditur á ſuperficiebus planis.*

Ut planum εὐθύγραμμον rectilineum dicitur, ita ſolidum ſi compoſitio pateretur, ἐπιπεδόεδρον tanquam dicas planifacium diceretur, quod facies habeat planas: ſic enim tetraedrum, hexaedrum, & cæteræ ſpecies compoſitis nominibus nominantur. Planum corpus diſtinguitur à numero planorum, quæ ἕδραι ſunt, unde tetraedrum, pentaedrum, hexaedrum, baſis etiam pro hedra dicitur. Plani rectilinei differentiæ fuerunt à numero laterum vel angulorum, unde trilaterum, quadrilaterum, multilaterum, vel triangulum, quadrangulum, multangulum.

t

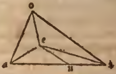
gulum. Sic corporis plani differentiæ ſunt á numero terminorum, quos hedras diximus appellari, ſed aliter quam in planis ſeries perpetua eſt in pyramide á quaternario: in pyramidato autem á quinario. Numerus angulorum numero terminorum non perpetuo reſpondet pyramis tetraedra, pentaedra, polyedra, eſt quidem quadrangula, quinquangula, multangula, ſed priſma pentaedrum eſt ſexangulum, hexaedrum, octangulum, & ſic deinceps.

8. *Anguli plani comprehendentes angulum ſolidum ſunt minores quatuor rectis.* 21 *p* 11.

Nam ſi quatuor rectis æquarentur, complerent locum planum per 4 e 10 e 6, neque omnino angulum facerent, multoque minus ſi majores.

9. *Si tres anguli plani minores quatuor rectis comprehendant angulũ ſolidum, duo quilibet ſunt majores reliquo: & ſi duo quilibet ſint majores reliquo, comprehendent angulum ſolidum.* 20 & 23 *p* 11.

Analogia eſt ad 7 e 6, & cauſſa etiam in promptu eſt. Nam ſi duo plani anguli eſſent æquales reliquo, nullum ſpatium medium cum reliquo cõcluderẽt, quin ſi cogites congruere cruribus planum congruentia ſua facerent é duob. unum: multo vero minus ſi minores. Cõverſa hinc etiam patet. Euclides ita demonſtrat. Primo ſi anguli tres ſunt æquales, duo: protinus intelliguntur majores



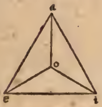
eſſe reliquo. Sin anguli ſint inæquales, ſit angulus *aei* major angulo *aeo*, & æqualis amputetur *aeu*, & æquetur *eu* ipſi *eo*. Iam per 2 e 7 duo triangula *aeu* & *aeo* æquantur baſibus *au* & *ao*. Item *ao* & *oi* majora quam *ai* & *ao*, æquatur ipſi *au*. Ergo *oi* majus eſt ipſo *iu*: Hic duo triangula *uei* & *ieo* duobus cruribus æqua, & baſis *oi* major baſi *iu*: Ergo per 4 e 7 angulus *oei* major eſt angulo *ieu*. Ergo duo *aeo* & *oei* ſunt majores quam ipſe *aei*.

10. *Solidum planum eſt pyramis aut pyramidatum.*

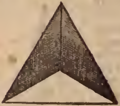
Vocabulis novis in ré minime nova utimur, ſed tamen nondum generaliter nominata. Dichotomiæ tales præceſſerunt de línea lineato, triangulo triangulato: & veritas rerum in hæc genera apte concluditur.

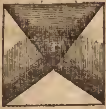
11. *Pyramis eſt ſolidum planum á baſi rectilinea æqualiter faſtigiatum.*

Ut hic









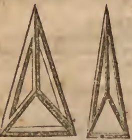
Ut hic intelligis à triangula baſi *aei* in verticem *o* erigi triangula *aoe, aoi, eoi*: in pyramide *aeiou* vides à baſi quadrangula *aeio* in verticem *u* triangula ſimiliter erigi. *Itaque*

1. *Pyramidis hedræ ſunt una plures angulis in baſi.* *Et*

2. *Pyramis eſt prima figura ſolidarum.*

Eſt enim pyramis in ſolidis, ut triangulum in planis. Reſolvi enim pyramis poteſt in ſolidas figuras alias, ſed in nullam ſimpliciorem poteſt, & paucioribus hedris conſtantem. *Itaque*

3. *Pyramides æquealtæ ſunt ut baſes.* 5 e & 6 p 12.

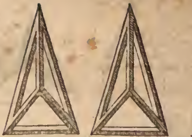


Et

4. *Reciprocæ baſi & altitudine ſunt æquales.* 9 p 12.

Conſectaria hæc ſunt è 12 & 13 e 4. Atque hic Euclides ut in priſmatis nominavit baſim & altitudinem pro cruribus æqualis anguli, ut in exemplis. Duæ

pyramides ſunt æque-altæ baſis triangulæ prioris duplæ ad poſteriorem. Itaque prima eſt dupla ſecundæ. Item de



exemplo ſequenti, ut baſis primæ ſit ad baſim ſecundæ, ſic altitudo ſecundæ ad altitudinem primæ.

12. *Tetraedrum eſt pyramis ordinata a' quatuor triangulis comprehenſa. 26 d 11.*

Ut hic vides. In planis rectilineis admonuimus in unoquoque genere unicā ſpeciem eſſe ordinatam è triangulis æquilaterum, è quadrangulis quadratum, ſic modo è toto pyramidum genere unicam ſpeciem ordinatam eſſe tetraedram: neque tamen omnem, ſed quæ comprehenditur à triangulis non ſolum ordinatis quidem ſigillatim, ſed æqualibus inter ſe ſimilibuſque. Poſſunt enim corpora comprehendi ab ordinatis hedris, quæ tamen non ſint ordinata, quia hedræ illæ poſſunt ordinatæ ſeparatim eſſe, ſed neque æquales inter ſe, neque ſimiles, neque ideo ordinatum corpus comprehendent: qualia ſunt Archimedis tredecim corpora apud Pappum 5 lib. Tetraedrum autem generali nomine ſpecies iſta dicitur propter excellentiam, quomodo etiam pyramis appellatur.



Itaque

1. Tetraedri latera ſunt ſex, anguli plani duodecim, ſolidi quatuor.

Nam tetraedrum comprehenditur à quatuor triangulis ternorum laterum atque angulorum: unumquodque autem latus bis aſſumitur, ideoque numerus eſt dimidio minor. Hæc ſunt in ſcholis ad finem 15 l. Et

2. Tetraedra duodecim complent ſolidum locum.

Quia octo ſolidi anguli recti complentes locum & duodecim anguli tetraedri æquantur inter ſe, cum utrique 24 rectis planis comprehendantur. Rectus enim ſolidus comprehenditur à tribus planis rectis, ideoque 8 comprehendun tur à 24. Item angulus tetraedri comprehenditur à tribus planis æquilateris, id eſt à ſex tertiis unius recti: ideoque à duobus rectis. Itaque 12 comprehendū tur à 24. Sic Potamon geometra (ut eſt apud Simplicium 8 cap. 3 lib. de cælo) demonſtraverat ex angulis compleri locum ſolidum à 12 pyramidibus. Et

3. Si quis

3. Si quatuor triangula ordinata & æqualia ſolidis angulis componantur, comprehendent tetraedrum.]

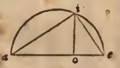


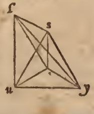


Hæc fabrica promptior eſt, uti potes in ſubjectis exemplis intelligere. Hæc enim triangula ſic explicata copulato & connectito inter ſe, facies tetraedrum.

13. *Si recta potens ſeſquialterum ad latus trianguli æquilateri ſecetur dupla ratione, duplum ſegmentum perpendiculare trianguli centro, connexum cum ejus angulis comprehendet tetraedrum.* 13 p 13.

Comprehendi ſolidum á rectis intellige per plana rectis comprehenſa, ut deinceps. Ut hic eſto primum recta *ae* potens ſeſquialterum ad *ai* latus trianguli æquilateri, ut antea patuit 6 e 12, & ſecetur dupla ratione in *o* per 1 c 13 e 5, duplumque ſegmentum *ao* ſit perpendiculare æquilatero triangulo *uys* ad centrum *r* per 7 e 21, ſitque *rl* connexum cum angulis per *lu*, *ls*, *ly*: Dico triangula *uys*, *usl*, *ysl*, *uyl* æquilatera & æqualia eſſe quia latera omnia ſunt æqualia: Humilia tria primo æquantur ex theſi, ſublimia tria per 5 e 12 & é ſublimibus quodlibet humili: Nam ſi triangulo circulus circumſcriptus intelligatur, latus poterit triplum radii *ur* per 7 e 18: At ſublime poteſt item triplum, ut patet in prima figura de radio *oi*, qui eſt pro radio ſecundæ figuræ *ur*: ut enim *ao* ad *oi*, ſic per 1 c 4 e 8 *oi* ad *oe*, & per 1 c 15 e 4, ut prima recta *ao* eſt ad tertiam *oe*, ſic quadratum *ao* ad quadratum *oi*, & componendo *ao* cùm *oe*, ut *ae* ad *oe*, ſic quadrata *ao* & *oi*, id eſt per 5 e 12, quadratum *ai* ad quadratum *oi*, at *ae* eſt tripla ipſius *oe*: Ergo quadratum *ai* eſt triplum quadrati *oi*. Quare latus ſublime æquale ipſi *ai* poteſt triplum radii, lateraque ideo omnia æqualia, proindeque & ipſa triangula.





P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXIII.

de priſmate.

Pyramidatum eſt ſolidum planũm á pyramidibus comprehenſum.

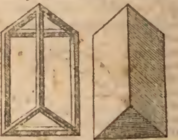
Pyramidatum ſic é pyramidibus componitur, ut é triangulis triangulatum, & pyramis prima figura ſic antea facta eſt, & compoſitio poſtea per ſpecies apparebit.

2. *Pyramidatum eſt priſma aut polyedrum miſtum.*

Partitio pyramidati deinde fuit difficilior in materia rerum nondum ſatis animaduerſarum vel explicatarum: dichotomia tamen hic adhibita eſt, quæ nobis optima adhuc occurrit.

3. *Priſma eſt pyramidatum, cujus duo oppoſita plana ſunt æqualia, ſimilia, parallela: reliqua parallelogramma.* 13 d 11.

Ut hic vides. Pyramidis unica baſis fuit, priſmatis duæ ſunt baſes oppoſitæ primo æquales, tum ſimilrs, deinde parallelæ: reliquæ ſunt parallelogrammæ. Priſma eſt Campano corpus ſerratile, ſecuto nempe quandam originem nominis: πρίω enim, id eſt ſeco, diſtringo, & πρισμὸς eſt coarctatio, compreſsio.



Itaque

Hedræ priſmatis ſunt binario plures angulis in baſi.

Ut vero pyramidis á quaternario, ſic priſmatis á quinario in infinitum accretio eſt, ut ſit á baſi triangula, quadrangula, quinquangula, pentaedrum, hexaedrum, heptaedrum, & ſic in infinitum. Priſma autem in Euclide interdum ſpecialiter intelligitur de pentaedro, ut ad 40 p 11, ad 3. 4 p 12, ut rectangulũ in planis pro oblongo, & pyramis in ſolidis pro tetraedro ordinato.

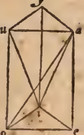
4. *Planus é baſi & altitudine eſt ſoliditas recti priſmatis.*

Geodæſia nempe parallelogrammi rectanguli eſt hic communis, cum altitudinis plana ſunt rectangula parallelogramma, ſed res per ſpecies intelligetur.

5. *Priſma eſt triplum pyramidis baſi & altitudine æqualis.* é 7 p 12.

Ut in exemplo priſma pentaedrum ſectum eſt in tres pyramides æquales: Prima enim é planis *aei, aeo, aoi, eio* æquatur ſecundæ é planis *a oi, aou, aiu, auy* per 7 e 7, quia æquatur baſi & altitudine communi. Itaque prima & ſecunda æquatur:

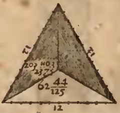
æquatur: Et ſecunda eadem æquatur ſibi ipſi, dum baſis ſit *iou*, & vertex *a*, tumque æquatur tertiæ é



planis *aiu*, *aiy*, *uiy*, *auy*. Itaque tres æquantur. ſi baſis triangulata ſit, priſma ſolvatur in priſmata baſis triangulæ, theorema concludetur ut prius. *Itaque*

1. *Planus é ſua baſi & triente altitudinis eſt ſoliditas pyramidis baſi & altitudine æqualis.*

Altitudo autem pyramidis habebitur, ſi quadratum é radio baſis tollatur é quadrato lateris: Latus enim reliqui per 5 e 12 erit altitudo, ut in ſubjecto exemplo. Hic area trianguli $62\frac{44}{125}$ eſt baſis pyramidis: Altitudo eſt $9\frac{15}{19}$, quia per 4 e 18, latus poteſt triplum radii: At ſi de 144



quadrato 12 lateris tollatur ſubtriplum, id eſt 48, reliquum 96 per 5 e 12 erit altitudinis quadratum, quadratique latus erit $9\frac{15}{19}$. Tertia autem pars $3\frac{5}{19}$, ex qua & baſi planus erit $203\frac{1103}{2375}$ Sic in exemplo ſequẽte quadratũ 36 radii 6 tollatur á quadrato $292\frac{9}{1156}$ lateris $17\frac{6}{34}$, reliqui $256\frac{9}{1156}$ latus erit $16\frac{3}{34}$, pro altitudine,



cujus tertia $5\frac{37}{102}$, & baſi $72\frac{1}{4}$ erit $387\frac{11}{24}$. Si pyramis ſit curta, metire totam, & partem quæ deeſt, tum á tota detrahe quod defuerat: ut hic. Sit *ao* latus totius $16\frac{5}{32}$, *eo* latus particularis $8\frac{1}{13}$, erit igitur perpendicularis totius *ou* $15\frac{5}{32}$: tertia pars $\frac{5}{96}$, ex qua & baſi $93\frac{3}{11}$ planus erit 471 pro tota pyramide. At in minore pyra-

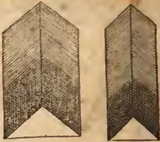
re pyramide á quadrato lateris $65\frac{1}{256}$ ſublato quadrato radii 9: reliqui $56\frac{1}{256}$ latus fere $7\frac{1}{2}$ pro altitudine, cujus tertia pars fuit $2\frac{1}{2}$: baſis fere 22, ex qua & tertia illa parte planus eſt 55 pro ſoliditate minoris pyramidis, qua deducta de majore reliquum 416 erit pro curta pyramide. Hoc modo curtum priſma metieris.



Et

2. *Priſmata homogenea æquealta ſunt ut baſes.* 29.30.31.32 p 11.

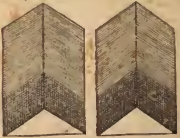
Cum nempe ſint æquemultiplicia pyramidum. Homogenea autem requirũtur, quia pentaedrum cũ hexaedro non ita conveniret. Conſectarium eſt é 12 e 4.



Et

3. *Si reciprocantur baſi & altitudine, ſunt æqualia.* 34 p 11.

Cõſectarium é 13 e 4.



Et

4. *Si priſma ſecatur plano oppoſitis hedris parallelo, ſegmenta ſunt ut baſes.* 25 p 11.



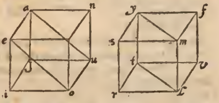
Quia ſegmenta ſunt priſmata homogenea. Itaque cum ſint æquealta, altitudine nempe ſecantis plani, erunt ut baſes, & hic baſes ſumendæ ſunt oppoſitæ altitudini.

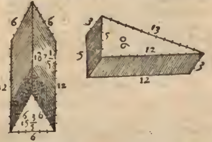
6. *Priſma eſt pentaedrum aut é pentaedris compoſitum.*

Partitio ut antea qualis fieri potuit, & hic ſolutio compoſitionem oſtendet.

7. *Si pentaedra alterum baſis triangulæ, alterum parallelogrammæ ad triangulam duplæ ſunt æquealta, ſunt æqualia.* 40 p II.

Cauſſa eſt brevis, quia dimidia ſunt ejuſdem priſmatis: ut hic priſmate per diagonios oppoſitorum laterum biſecto intelliges. Euclides ita demonſtrat. Sunto pentaedra *aeiou* & *ysrlm* æquealta, primum baſis triangulæ *eio*, ſecundum parallelogrammæ *sl* duplæ ad triangulã, utrumque vero duplicetur & abſolvatur, ut primum ſit *aeioun*, ſecundum *ysrlvf*. Jam ex theſi baſis *sl* dupla eſt baſis *eio*, cujus etiam dupla eſt baſis *eo* per 4 c 6 e 10. Itaque baſes *sl* & *eo* æquantur, ideoque cum priſmata ex theſi hic ſint æquealta, ut baſes ex concluſione æquales, priſmata erunt æqualia, ideoque & ipſorum dimidia æqualia *aeion* & *ysnlr*, quæ propoſita fuerant. Priſmatis vero pentaedri geodæſia jam dicta generaliter, res é duobus ſubjectis pentaedris intelligatur. Planus ex 18 perimetro baſis triangulæ & 12 altitudine eſt 216, qui additus baſi triangulæ 15 $\frac{18}{31}$, id eſt fere $\frac{3}{5}$ bis aſſumptæ, id eſt 31 $\frac{1}{5}$ componit 247 $\frac{1}{5}$ ſummam totius ſuperficiei: At planus ex eadem baſi 15 $\frac{3}{5}$ & altitudine 12 eſt 187 $\frac{1}{5}$ pro tota ſoliditate. ſic in ſecundo priſmate pentaedro, qui cuneus ex acumine dicitur, & qui proprie á ſecando priſma diceretur, ſuperficies tota eſt 150, ſoliditas erit 90.





u 8. *Priſma*

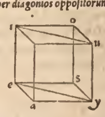
8. *Priſma é pentaedris compoſitum eſt hexaedrum aut polyedrum: hexaedrum parallelepipedum aut trapezium.*

Partes ſuis nominibus intelliguntur:& partitio eſt ſuperiorum ſimilis.

9. *Parallelepipedum eſt cujus oppoſita plana ſunt pallelogramma.* é 24 p II.

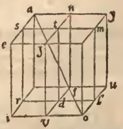
Itaque parallelepipedum in ſolidis reſpõdet parallelogrammo in planis. Hic enim hedræ oppoſitæ ſunt parallelæ, illic oppoſita latera ſunt parallela. Itaque

1. *Biſecatur plano per diagonios oppoſitorum laterum,* 28 p 11.



Reſpondet 34 p I. Eſto priſma é ſex baſibus *ai, yo, ye, ui, ri, au*, diagonii biſecant per 2 c 6 e 10 oppoſitas baſes, & reliquæ oppoſitæ baſes duorum priſmatũ diſſectorum per 3 e æquantur. Quare duo priſmata comprehenduntur á baſibus æqualibus multitudine & magnitudine: Itaque æqualia. Et

2. *Si biſecatur duobus planis biſecantibus oppoſita latera communis biſectio & diagonius, inter ſe biſecantur.* 39 p 11.



Quia hic diametri (qualis eſt illa biſectio) inter ſe biſecantur, ut in exemplo. Eſto parallelepipedũ *aeio uy* biſectũ á duobus planis biſecantibus oppoſita latera: duo plana *srlm* & *uȝvf*. Hic communis ſectio *tsl* & diagonius *ao* biſecantur inter ſe.

10. *Si tres rectæ ſunt proportionales, parallelepipedum mediæ æquatur æquiangulo parallelepipedo omnium.* é 36 p II.

Conſectarium é 3 c 5 e, quod nos admonuit antea in planis generaliter verum eſſe de parallelogrammis, quod rectangulis duntaxat erat attributum.

11. *Parallelepipeda rectangula octo complent locum ſolidum.*

Id reſpondet in planis parallelogrammo rectangulo, utque illic anguli plani recti quatuor complent locum planum, ita hic octo ſolidi anguli complent locum ſo-

cum ſolidum, neque magis hic proprium cubo quam fuit antea quadrato: unde Ariſtotelis geometria illa emendatur.

12. *Figuratus parallelepipedi rectanguli appellatur ſolidus, factus à tribus numeris.* 17 d 7.

Ut ſi multiplices 1.2.3. facies 6 ſolidum: item ſi multiplices 2. 3. 4. facies 24 ſolidum, & latera ſolidi 6, erunt 1.2.3: ſolidi 24, erunt 2.3.4. Sic in planis planus abſolute appellatur, ut hic ſolidus. *Itaque*

2. *Si duo ſolidi ſunt ſimiles, habent proportionalia latera & duos medios proportionales.* 21 d 7. 19.21 p 8.

Conſectarium eſt è 5 e 22. fiunt autem medii proportionales è lateribus ſimilium, ſecundo, tertio, quarto: Item tertio, quarto, quinto. Ut hic vides.

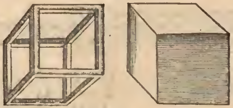
2. 3. 5. 4. 6. 10.
30. 60. 120. 240.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXIIII. de cubo.

P*Arallelepipedum rectangulum eſt cubus aut oblongum.*
Partitio reſpondet in planis partitioni parallelogrammi rectanguli in quadratum & oblongum, quin tota hæc differentia communis eſt planorum & ſolidorum, tantumque quadrati & cubi nomina diſtincta ſunt. Nam in planis æque & ſolidis dicuntur oblongum, rhombus, rhomboides, trapezium.

2. *Cubus eſt rectangulum iſoedrum.* 25 d 11.

Ut hic. Definitio reſpondet quadrati definitioni: utraque enim figura eſt rectangula & rectitermina: ſed termini in quadrato latera dicũtur, in cubo dicuntur hedræ, quæ tamen laterib. etiã definiuntur. Ergo ut differẽtiæ corporũ generales à generalib. ſuperficierũ differentiis plano obli-



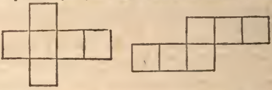
quo: ſic modo ſpeciales à ſpecialibus aſſumuntur. Corpus planum quod comprehenditur à planis ſuperficiebus. Corpus cubicum quod à quadratis comprehenditur, ſed nomen generi defuit, quo proprie corpus planum diceretur, ſpeciei huic proprium nomen factum eſt cubus. De cubo myſterium eſt quoddam apud Vitruvium in procemio lib. quinti, quod illic perlegito. *Itaque*

1. *Cubi latera ſunt duodecim, anguli plani vigintiquatuor, ſolidi octo.*

1 o item eſt é ſcholio ad finem 15 lib.

2. *Si ſix quadrata æqualia ſolidis ang ulis componantur, comprehendent cubum.*

Ut hic in duobus exẽplis.



3. *Si é quadrati angulis perpendiculares lateribus æquales ſublime connectantur, comprehendent cubum.* é 15 p 11.

Conſectarium eſt é proximo ſuperiore conſectario, ſex enim quadrata tum connectentur.

3. *Diagonius cubi poteſt triplum lateris.*

Nam diagonius quadrati poteſt duplum lateris per 3 c 5 e 12, & diagonius cubi poteſt & latus & diagonium quadrati per idem: poteſt itaque triplum lateris.

4. *Si quatuor rectarum continue proportionalium prima ſit dimidia quartæ cubus, prima erit dimidius ad cubum ſecundæ.* é 33 p 11.

Conſectarium eſt é 15 e 1 e 4, unde problematis deliaci eſt ſolutio ab Hippocrate primum deprehenſa, ut in proœmio plenius actum eſt. At duarum mediarum meſographus ab Herone fuit. 8 e 13.

5. *Solidus cubi etiam cubus dicitur, ſolidus nempe æqualium laterum.* 19 d 7

Itaque

Fit á numero in ſuum quadratum multiplicato.

Sic efficitur cubus multiplicando numerum per ſeipſum & factum per primum: quales ſunt á primis novem notis arithmeticis primi novem cubi.

1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Hæc generalis eſt inventio cubi & geometrica & arithmetica, ſpecialis invẽtio varia eſt in Euclide é cõtinue proportiõalibus numeris & é cubis ipſis, unde repetito, ſi quidem fructum tantæ ſubtilitatis agnoveris. Analyſis quadrati

lateris

lateris proprium Theorema in Euclide habuit: analyſis cubi non habuit: analogiam tamen hic ſequi licet, & alteram geometricæ analyſeos utilitatem proferre: propoſitio per analogiam ſic erit.

6. Si recta ſecetur in duo ſegmenta, cubus totius æquabitur cubis ſegmentorum & duplici ſolido ter comprehenſo á quadrato ſui ſegmenti & reliquo ſegmento.

Ut latus 12 ſecetur in 10 & 2 cubus 1728 ex toto 12 æquabitur duobus cubis 1000, & 8, é ſegmentis 10 & 2, & duplici ſolido, quorum primus 600 ter comprehenditur à 100 ſui ſegmẽti quadrato & à 2 reliquo ſegmento, ſecundus 120 ter item comprehenditur à 4 ſui ſegmenti quadrato & à 10 ſegmento. ſed rem totam geneſis totius cubi facilius declarabit, quomodo nempe extremi & inter medii ſolidi generentur. fiat igitur cubus é tribus æqualibus lateribus 12, 12, 12, atque in primis ſecundum latus primo multiplicetur ſic.

```
  1 2
  1 2
 -----
  2 4
1 2
```

Productas notas ne addito, ſed ſingulas per reliquum latus multiplicato, & multiplicatas addito ſeparatim ſic.

```
      2 4
    1 2
     -----
      1 2
      4 8
    2 4
    2 4
  1 2
 ------------
  1, 6, 12, 8
```

Itaque

Latus primi cubi ſingularis eſt alterum latus ſecundi ſolidi, ejuſdemque lateris quadratus eſt alterum latus primi ſolidi, cujus reliquum latus eſt latus ſecundi cubi, ejuſdemque reliqui lateris quadratus eſt reliquum latus ſecundi ſolidi.

In iſta igitur æquatione quatuor ſolidorum cum uno ſolido conſiderabis peculiarem geneſim & compoſitionem, primum ut cubus ultimus fiat ex ultimo ſegmento 2, tum ut ſecundus ſolidus à 4 quadrato ſui ſegmenti & 10, & reliquo ſegmento ter comprehendatur: Denique ut primus ſolidus à 100 quadrato ſui ſegmenti 10, & reliquo ſegmento 2, ter item comprehendatur: poſtremo ut cubus 1000 fiat é majore ſegmento 10. Ex hac igitur geneſi analyſis contraria deducitur é mutua cuborum cum ſolidis colligatione, qualis in quadratis

dicta eſt. Hic enim tametſi de ſolido agitur, attamen duo latera ſpectantur, quia alterum compoſitum & planum eſt. primi igitur cubi 1000 latus 10, eſt clavis ad duos ſolidos, & cubum ſequentes aperiendum. Eſt enim alterum latus ſecundi ſolidi, quippe comprehenſi ter ab eo & ſecundi ſegmenti quadrato. Eſt etiam ejuſdem lateris 10 quadratus 100, latus alterum primi ſolidi 600, comprehenſi nempe ter ab hoc quadrato 100, & reliquo ſegmento 2: eſt etiam reliquum primi ſolidi latus 2 latus ſequentis cubi: ac poſtremo ejuſdem lateris 2 quadratus reliquum latus ſecundi ſolidi. Hoc igitur velut Ariadnes filo tam varii laterum errores explicantur, ut in quadratis fuit. Nam cum latera ſingularium cuborum inveneris, latus etiam cubi totius inveneris: tametſi enim cubus univerſus eſt major cubis partium: attamen latus univerſum eſt æquale lateribus ſingularium cuborum, & ſolidis intermediis duntaxat utimur ad cubi ſequentis latus inveniendum. Quæratur igitur latus cubi 1728. Primum notabis punctis ultimum & millenarium, deinde quemcunque locum, ſic 1728: Deinde cubi maximi in primum pūctum definientis inveni latus cubicum, hic erit 1: ſeorſum nota 1, & lateris cubum tolle de numero deſniente in idem punctum, nihil manebit, ſic 1728(1: Hoc primum ſingularis cubi latus eſt. Secundo latus idem triplicetur, fient 3, primum latus ſecundi ſolidi. Hic numerus triplus dicitur, ſubjiciturque eidem ſolido ſic.

1728 (1
  3

Item latus quadretur, erit 1, & cum quadratum fuerit triplicetur, erit 3 primū latus primi ſolidi, & diviſor dicitur, eidemque ſolido ſubjicitur, ſed inferius, ut á triplo ſejungatur ſic.

1728 (1
  3
3

Idem etiam diviſor habetur multiplicatione quoti per triplum, quia ſolidus idem eſt quocunque ordine tria ejus latera multiplicentur. Per inventum diviſorem divide primum ſolidum, emergit 2 reliquum ejuſdem primi ſolidi latus. Atque latus hoc reliquum, quia ſequentis cubi latus eſt, cum ſuperioris cubi latere deinceps adnota, & per quotum 2 multiplica 3 diviſorem, facies 6 ſubjicienda diviſori. Poſtremo idem latus 2 quadretur, fiet 4 reliquum latus ſecundi ſolidi: 4 igitur per 3 triplum multiplicatis fiunt 12, item ſubjicienda ſecundo ſolido.

ſolido. Denique 2 latus cubi cubatum facit 8 ſubjicienda ſequenti puncto: ad de tres ſummas, facies 728, quibus ſubductis nihil manebit, ſic.

1728 (12
32
4
3
6
128
728

Quod ſi cubi ſingulares duobus plures fuerint, latera præcedentia pro unico ſumuntur: ut ſi quæratur latus cubi 34012224, notabis locis cubicis, latus primi cubi erue, ſic.

7
34012224 (3

Denique ſecundi ſingularis ſic eruatur.

1
7244
34012224 (32
94.
474
34
368
5768

Hic igitur cum duo latera ſint tanquam unicum triplicandum & triplum ſubjiciendum ſecundo ſolido: eadem duo latera velut unicum quadretur, quadratumque triplicetur, fient 3072 primo ſolido pro diviſore ſubjicieda: per hunc diviſorem divide primum ſolidum, quotus erit 4, per quem multiplicato diviſorem 3072, facies 12288. Poſtremo quadra 4 quotum, fient 16: iis multiplica triplum 96, fient 1536 ſubjicienda triplo. Tandem etiam quotum cubatum

id eſt

id eſt 64 ſubjice puncto ſequenti, & tres ſummas addito, & ſubducito, nihil manebit, ſic.

1244
3402224
864
26

3072
12288
1536
64
1244224

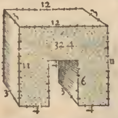
Aliquando poſt cubicum latus jam repertum, locis proximis neque ſolidus eſt ullus, neque cubus. Itaque tum lateri invento, circulus adſcribendus eſt, ut in cubo 8120601(201. Si ſecundum latus primi ſolidi ſit majus latere ſequentis cubi, ſolidus diviſus partem ſecundi ſolidi complectebatur, ideoque minuendum latus illud eſt, ut in cubo 17576, primum latus erit 2, ſecundum, ſi feceris 7, ut videtur initio fieri poſſe, facies primi ſolidi ſecundum latus majus latere ſequentis cubi. Itaque latus illud minuatur, & pro 7 ſume 6, latus legitimum produces, analyſis tota erit 17576(26. Hæc via generalis eſt & communis ad quamlibet magnum cubi latus retexendũ. Sic in cubo 312908547069 latus invenietur 6789. In partibus eſt quoque cubi ratio. Nam ſi propoſitus numerus cubus nõ eſt, nullũ eſt ejus in numeris verum latus, cubi tamen in eo maximi verum latus erui poteſt: ut in 17616 cubus continetur 17567, & latus ejus eſt 26, & ſuperſunt 40. Latus itaque numeri non cubi nullum tam accuratum reperietur unquam, quin accuratius inveniri poſsit: ut de quadrato jam dictum eſt, duoque item hic modi ſunt cubicum latus vero propinquum inquirendi, quales etiam in quadrato ante declarati ſunt. Primus modus ſubducit duos ſolidos & ultimum cubũ in proximo majore cubo comprehenſos, quo intelligatur duorum continuorum cuborum diſtantia, ſicut antea duorum quadratorum diſtantia intellecta eſt. Huc enim cubicus gnomo quidã recurrit, quem cõcipis è tribus planis cubi, uti gnomonẽ quadrati è duobus quadrati lateribus. Sic in exemplo 17616, ubi latus eſt 26, & ſuperſunt 40, ſequẽtis cubi. Divides 27 in 26 & 1, & ut antea didiciſti ſolidos hinc & cubũ facies, primus ſolidus comprehendetur ter à 676 quadrato ſegmenti 26 & 1 reliquo ſegmento. Itaque erit 2028: ſecundus comprehenditur ter à quadrato 1, & reliquo ſegmento 26, & erit 78. Cubus autem 1 eſt 1: adde igitur illos duos ſolidos, & hunc cubum, habebis 2107 pro nomine reliqui 40. Itaque latus 17616 eſt 26 $\frac{40}{2107}$, quo intelligitur, ut antea in quadrato, quantum numerus 40 abeſt à nomine 2107, tantum cubum propoſitum abeſſe à proximo majore. Itaque ſi numeratorem 40 tollas à nominatore 2107, & reliquum 2067 addas 17616,

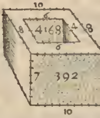
das 17616, totus erit 19683, cubus lateris 27. Secundus modus eſt per partes magni cujuſdam nominis ſed cubicas, ut earum latus jam certum ſit, ut numerus idem 17616 reductis ad centeſimas cubicas, id eſt ad 1000000 facit 17616000000, cujus numeri latus eſt 2601 pro numero datarũ cẽteſimarũ, ſic $\frac{2601}{100}$, id eſt $26\frac{1}{100}$ & ſuperſunt 19712199, quæ ne centeſimam quidem invento lateri poſſunt addere, quia differentia cubi proximæ majoris major eſt, ideoq; reliqua illa deſpiciuntur. Atque hæc de cubo: de reliquis autem parallelepipedis, oblongo, rhombo, rhomboide, deque trapezio & polyedris, pentaedris ſtereometra præcipua nulla eſt. Priſmatis geodæſia eſt expoſita prius, exemplis tantum ſpecialibus opus eſt, ut hic. Planus è baſis perimetro 20 & altitudine 5 eſt 100. Additis utrique baſi 25 & 25, id eſt 50, totus eſt 150 pro tota ſuperficie. Planus vero è baſi 25, & altitudine 5, eſt 125 pro tota ſoliditate: ſic in oblongo, planus è baſis perimetro 20, & altitudine 11 eſt 220, qui additus baſibus 24 & 24, id eſt 48 componit 268, pro tota ſuperficie. At planus è baſi 24 & altitudine 11 eſt 264 pro ſolidita te. Atque eadem geodæſia erit in

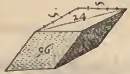


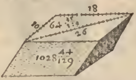


dimetiendis parietibus rectangulis vel portis aliqua feneſtra, aut cavitate vacuis, ſi vacua ipſa detrahantur, ut hic vides. In proximo exemplo ſpiſsitudo eſt 3 pedum, latitudo 12, altitudo 11: tota itaque ſoliditas eſt 396. ac porta eſt ſpiſſitudinis 3 pedum, latitudinis 4, altitudinis 6, ſoliditaſque portæ 72 pedũ, quibus ſubductis à toto pariete reſtant 324 pro reliquo parietis corpore. In ſecundo exemplo longitudo pedum 10, latitudo 8, altitudo 7, faciunt totius corporis 560 pedes: Cavitas longitudinis 6, latitudinis 4, altitudinis 7 facit 168, quibus ſub ductis de 560, reliqui ſumma eſt 392. Sic amplisſimi ædificii parallelepipedos parietes, muroſque omnes metiri liceat. Ea-





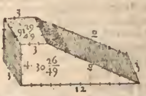




dem geodæſia eſt in rhombo, rhomboide, trapezio, & quolibet multangulo: baſis metienda eſt ut prius, tum ex ea & altitudine ſoliditas conſtabit: ut in rhombo baſis 24 altitudinis 4 ſoliditas eſt 96, in rhomboide baſis $64\frac{13}{129}$. altitudinis 11, ſoliditas $1028\frac{44}{129}$.

Eadē geodæſia denique trapezii: ut in exemplis. Superficies primi eſt 198, ſoliditas $192\frac{1}{2}$. Superficies ſecundi eſt $148\frac{3}{49}$, ſoliditas $91\frac{29}{49}$.





Eadem & priſmatis polyedri geodæſia erit: Ut hic vides in octaedro baſis ſexangulæ. Superficies erit $762\frac{6}{11}$, ſoliditas $1492\frac{4}{11}$.



Atque hinc vaſorū qualibet plana ſoliditatis ſpecie figuratorū capacitas æſtimari poteſt: Ut hic vides. Hic enim planus ē baſi ſexangula $41\frac{1}{7}$: radius enim eſt latus per 6 e 18, & altitudine 5 erit $205\frac{5}{7}$. Itaque ſi pes cubicus contineat 4 quartas ut Pariſienſes loquuntur, vas continebit quartas $822\frac{6}{7}$, id eſt fere 823.



P. RAMI

de polyedris miſtis ordinatis.

Polyedrum miſtum ordinatum eſt pyramidatum compoſitum è pyramidibus vertice coeuntibus in centro, & ſola baſi eminentibus.

Pyramidati primum genus in priſmate ità fuit: dicatur polyedrum miſtum ordinatum ſeparatim à pyramide & priſmate: quia neutrius definitio ei convenit. Pyramis ab una baſi faſtigiatur, miſtum non item. Priſmatis oppoſita plana ſunt æqualia, ſimilia, parallela, hoc convenit. At reliqua plana priſmatis ſunt parallelogramma, quod neque octaedro, neque icoſaedro, neque dodecaedro convenire poteſt, cum plana octaedri & icoſaedri ſint triangula, dodecaedri ſint quinquangula. Quare neque pyramis neque priſma hic dici poteſt, pyramidatum tamē eſt è pyramidibus vertice (ut è geodæſia mox intelligetur) coeuntibus in centro, & ſola baſi eminentibus, neque tamen propterea dixeris talibus pyramidibus inordinatis compleri locum, neque enim omnimodo ſumptæ compleant locum. Atqui è polyedris miſtis ordinatis Euclides tria duntaxat hæc ordinata ſibi propoſuit, quæ & nobis ſunt propoſita. Cū igitur pyramidatum miſtum ordinatum ita componatur è pyramidibus, geodæſia ipſius erit è geodæſia pyramidum componentium: baſiſque una per numerum omnium baſium faciet corporis ſuperficiem, & pyramis una per numerum omnium pyramidum multiplicata faciet ſoliditatem.

2. *Altitudo componentis pyramidis habetur per radium circuli baſi circumſcripti, perque polyedri ſemidiagonium.*

Baſis pyramidis patet oculis, altitudo intus latet, invenitur autem per triangulum rectangulum, cujus baſis eſt ſemidiagonius, crura radius circuli & perpendicularis altitudinis. Itaque ſublato radii quadrato de quadrato ſemidiagonii, latus reliqui per 5 e 12 erit altitudo: ſed radius circuli ſpecialem inventionem per ſpecies baſis triangulæ primum, deinde quinquangulæ habebit.

3. *Miſtum ordinatum eſt triangulæ baſis aut quinquangulæ.*

Partitio eſt è ſubjectis baſibus.

4. *Si quadratus è latere triangulæ baſis trifariam dividatur, latus trientis erit radius circuli baſi circumſcripti.*

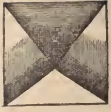
Ut patet per 7 e 18. Atque hæc radii circularis inventio eſt pro octaedro & icoſaedro.

5. *Miſtum ordinatum triangulæ baſis eſt octaedrum aut icoſaedrum.*

6. *Octaedrum eſt polyedrum miſtum ordinatum, quod ab octo triangulis comprehenditur.* 27 d 11.

Ut hic vides monogrammum & ſolidū.





Itaque

1. *Octaedri latera ſunt 12, anguli plani 24, ſolidi 6.*

Hoc item eſt de ſcholio ad finem 15 lib.

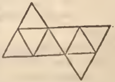
Et

2. *Octaedra novem complent locum ſolidum.*

Quadruplex enim angulus tetraedri æquatur triplici octaedri, & dodecuplex ideo nuncuplici. Itaq; novem anguli octaedri valent octo ſolidos rectos. Eſt ita Potamonis demonſtratio ex angulis conſentanea Euclidis demonſtrationi, item ex angulis quod quinque tantum ſolida ſint ordinata demonſtranti octaedrū ſolidi loci completivum efficiet contra Ariſtotelē: utque in planis, ſic in ſolidis triplex figura complebit locum.

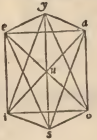
3. *Si triangula octo æquilatera & æqualia ſolidis angulis componantur, comprehendent octaedrum.*

Hæc vero fabrica facilis eſt, ut patet in ſubjecto exēplo: ubi uides tā quam duplicis pentaedri duo triangula æquilatera æqualia interſecari.



7. *Si recta centro quadrati utrinque perpendiculrais æqualis ſemidiagonio connectatur cum angulis, comprehendet octaedrum.* 14 p 13.

Nam perpendicularis *y u* & *s u* cum ſemidiagoniis *u a*, *u o*, *u i*, *u e*, æquabit per 2 e 7 octo late-



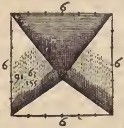
raya,ye,yo,yi,se,si,sa,so: octoque triangula. Itaque

1. *Diagonius octaedri poteſt duplum lateris*

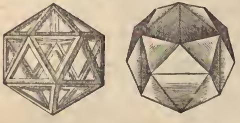
Ut patet per 5 e 12. Et

2. *Si quadratum de latere octaedri duplicetur, duplicati latus erit diagonius.*

Ut in ſubjecto exemplo latus eſt 6 quadratum 36, duplicatum 72, cujus latus $8\frac{8}{17}$ eſt diagonius. Atque hinc exiſtet geodæſia octaedri. Semidiagonius enim eſt $4\frac{4}{17}$: cujus quadratum eſt $17\frac{271}{289}$: & quadratum de 6 latere trianguli æquilateri potente per 4 e 18 triplũ radii eſt 36, éque 12 triente latus $3\frac{3}{7}$ eſt radius circumſcripti circuli. Quare ſublato quadrato 12 de quadrato $8\frac{8}{17}$ reſtabunt $5\frac{271}{289}$ quadratum perpendicularis cujus latus $2\frac{1}{5}$ eſt ipſa altitudo perpendicularis, cujus pars tertia eſt $\frac{11}{15}$ quæ per $15\frac{18}{31}$ baſim triangulam faciant $11\frac{66}{155}$ pro octava pyramide, quæ multiplicata per 8 facit $91\frac{63}{155}$ pro toto octaedro.



8. *Icoſaedrum eſt polyedrum miſtum ordinatum á viginti triangulis comprehenſum.* 29 d 11.



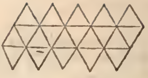
Itaque

1. *Icoſaedri latera ſunt 30, anguli plani 60, ſolidi 12.*

Conſectarium eſt item é ſcholio ad finem 15 lib. Et

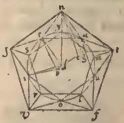
2. *Si viginti triangula ordinata & æqualia ſolidis angulis componantur, comprehendent icoſaedrum.*

Fabrica autem hæc prompta eſt, ut è ſubjecto exemplo perſpicitur.



9. *Si ordinata quinquangulum duplex & decangulum unum eidem circulo ſic inſcribantur, ut latus utriuſque quinquanguli ſubtendat duo latera decanguli, ſex rectæ circulo perpendiculares & radio ejus æquales, quinque ab angulis alterius quinquanguli connexæ & inter ſe, & cum angulis reliqui quinquanguli, ſexta à centro utrinque continuata latere decanguli, & connexa illic cum quinque perpendicularibus, hic cum angulis ſecundi quinquanguli comprehendent icoſaedrum. é 15 p 13.*

Fient enim viginti triangula æquilatera & æqualia. Eſto igitur quinquangulum duplum primũ *aeiou*, ſecundum *yſrlm*, quorũ latus quodlibet ſubtendat duo latera decanguli, nẽpe *utym*, ſubtendat *ya* & *am*, tum ſunto perpendiculares quinque ab angulis ſecundi quinquanguli *yu*, *ſj*, *rv*, *lf*, *mt*. & connectãtur primo inter ſe per connectentes *nj*, *jv*, *vf*, *ft*, *tn*. ſecundo cum angulis primi quinquanguli per connectentes *ne*, *ej*, *ji*, *iv*, *vo*, *of*, *fu*, *ut*, *ta*, *an*. Sexta à centro *d* ſit *bg* radius *dc* continuatus utrinque latere decanguli *cg* & *db* connexa ſupra cum perpendicularibus, ut per connectentes *ng*,



tg, infra cum angulis primi quinquanguli, ut per connectentes *bc*, *bi*, & cæteris locis ſimiliter, omneſque planis compleantur. Hoc dico icoſaedrum eſſe, & à viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehẽdi. Primo intermedia decem triangula perpendicularibus omiſsis æquilatera eſſe & æqualia unum demonſtrabit, ut *nat*. Nam *mt* & *yu* (quia ſunt perpendiculares) ſunt etiam per 6 e 21 parallelæ, & ex theſi ſunt æquales. Itaque per 6 e 12 e 5 *nt* æquatur ipſi *ym* lateri quinquanguli: item *na* per 5 e 12 poteſt crura *ny* & *ya*, id eſt per fabricam latera ſexanguli & decanguli, & per converſam 9 e 18 eſt latus quinquanguli: Idem erit de *at*. Quare *nat* eſt æquilaterum: idemque de reliquis novem intermediis *nae*, *nej*, *eji*, *jiv*, *ivo*, *vof*, *fou*, *fut*, *uta*, *tan*. Similiter & de quinque ſuperis triangulis probabitur ductis rectis *dy* & *cn*, quæ ut prius (quia connectunt æquales parallelas ipſas *dc* & *yn*) erunt æquales. At *dy* eſt latus ſexanguli. Itaque *cn* latus idem erit ſexanguli, & *cg* eſt latus decanguli. Itaque *gn* potens utrumque per 5 e 12 erit per converſam 9 e 18 latus quinquanguli, & ſimiliter *gt* concludetur latus quinquanguli. Quare *ngt* eſt æquilaterum, & quatuor reliqua ſimiliter erunt æquilatera. Reliqua quinque infra triangula ſimili

modo

modo concludentur: unum igitur eſto pro omnibus *ibe* ductis radiis *di* & *de*. Nam *ib* potens ut prius latera ſexanguli & decanguli latus erit quinquanguli, erit, & pariter *be* potẽs *de* & *db* latera ſexãguli & decãguli, latus quinquanguli. Quare triangulum *ebi* eſt æquilaterum, & quatuor reliqua ſimiliter oſtendentur æquilatera. Omnia igitur latera viginti triangulorum cum ſint æqualia, erunt triangula ipſa æquilatera, & per c 6 e 7 æqualia.

10. *Diagonius icoſaedri eſt irrationalis ad latus.*

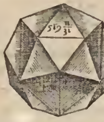
Quartum eſt exemplum ἀλόγων vel ἀσυμμέτρων: primum fuit de diagonio & latere quadrati, ſecundum fuit de ſegmentis rectæ proportionaliter ſectæ, tertium de diametro circuli & latere quinquanguli. Et

11. *Poteſt quintuplum circularis radii.*

Nam per 8 e 18 continuata é latere ſexanguli & decanguli ſecatur proportionaliter, & majus ſegmentum eſt latus ſexanguli: Ut hic biſecetur perpendicularis *ae* in puncto *i*, tum *eo*, id eſt minus ſegmẽtum continuatum dimidio majoris, id eſt *ie* poterit per 5 e 14 quintuplum ejuſ[...]m dimidii *ie*. Itaque cum *io* dimidium diagonii poſſit quintuplum biſegmenti, diagonius tota poterit quintuplum totius biſecti. Atqui hinc etiam erit geodæſia icoſaedri. Nam ad altitudinem pyramidis ſemidiagonius

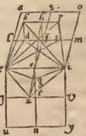


eſt é latere decanguli & ſemiradio circuli: latus autem decanguli eſt recta ſubtendens dimidiam peripheriam lateris quinquangularis, vel majus ſegmentũ radii proportionaliter ſecti. Sic enim geometrice ſumi poteſt, & pro ſua menſura numerari. Itaque ſi quadratum é latere decanguli tollatur á quadrato é latere quinquanguli, relinquetur per 9 e 18 quadratum é latere ſexanguli, id eſt é radio. Latus decanguli quia latus quinquãguli hic eſt 6, erit $3\frac{9}{35}$ recta nempe ſubtendens dimidiam peripheriam: ſemiradius autem ſic habebitur. Quadrata quinquanguli & decanguli ſunt $369\frac{639}{1225}$: & ſubductione hujus ab illo reliquum quadratum ſexanguli per 9 e 18 eſt $26\frac{586}{1225}$, & reliqui latus pro radio eſt 5 & fere $\frac{5}{7}$. ſemiradius igitur eſt $2\frac{6}{7}$: adde latus decanguli $3\frac{9}{35}$ cum $2\frac{6}{7}$, totum erit $5\frac{33}{35}$ pro ſemidiagonio icoſaedri. Radius circuli triangulo circumſcripti eſt per 7 e 18 idem qui prius $3\frac{3}{7}$ é quadrato nempe 12. Itaque ſi quadratum circularis radii tollatur á quadrato ſemidiagonii, relinquetur quadratum altitudinis & perpendicularis: quadratum ſemidiagonii eſt $35\frac{189}{1225}$ quadratum radii circularis eſt 12, hoc ab illo ſublatum relinquit $23\frac{439}{1225}$, cujus latus eſt fere 5 pro pe[...]



circu[...]

perpendiculares á punctis *db,c,g*, ipſæ *d*, *cp*, *gz*, duæque primæ connexæ inter ſe per *bp*, & cum angulis cubi per *be* & *pi*, tertia connexa cum iiſdem angulis per *ze*, *zi*, omneſque planis compleantur. Dico primum quinque latera *bp*, *pi*, *iz*, *ze*, *eb*, æqualia eſſe, quia ſingula ſunt dupla ejuſdem ſegmenti majoris. Ductis enim rectis *de* & *eg*, *ig* patebit de duobus, eodemque modo de reliquis. Primo igitur *cd* & *bp* æquantur per 6 e 21 & 6 c 12 e 5. Itaque *bp* eſt duplum majoris ſegmenti. Deinde tota *fl* ſecta proportionaliter & minus ſegmentum *dl* poſſunt per 6 e 14 triplum majoris *fd*, id eſt per fabricam *db*. Itaque *le* quæ eſt æqualis ſectæ *lf* & *ld* poſſunt triplum ipſius *db*: at per 5 e 12 *de* poteſt *le* & *ld*. Itaque poteſt triplum ipſius *db*. Igitur utraque *ed* & *db* poteſt quadruplum ipſius *db* ad *be* per 5 e 12 poteſt ipſas *ed* & *db*, ideoque poteſt quadruplum ipſius *eb*, & per 7 e 12 eſt ipſius dupla. Itaque duo latera *eb* & *bp* æquantur, & eodem argumento æquantur *pi*, *iz*, *ze*. Quinquangulum igitur eſt æquilaterum. Dico quod eſt etiam planum, poſsit enim dici obliquum eſſe & in duobus planis ſitum. Eſto igitur *fh* parallela ad ipſas *db* & *cp*, & ipſis æqualis, & ducatur recta *hz*, ipſa una erit per 10 e 7. Nam ut tota *tr*, id eſt *rf* eſt ad majus ſegmentum, id eſt ad *fh*, ſic *fh*, id eſt *zg* eſt ad *gr*, & bina crura *fh*, *gr*, *fc*, *gz* per 6 e 21 ſunt alterne parallela. Itaque baſes ſunt continuæ. Patuit adhuc quinquangulum æquilaterum & planum factum eſſe: reliquum eſt ut æquiangulum probetur. Ducantur rectæ *ep*, *ec*, dico angulos *pbe* & *ezi* æquari, quia crurum æqualium per fabricam baſes *pe*, & *ei* habent æquales potentes nempe quadruplum ipſius *le*. Nam recta *lf* ſecta proportionaliter & aucta majore ſegmento *df*, id eſt *fc*, ſecatur iterum proportionaliter per c 3 e 14, & per 6 e 14 tota & minus ſegmentum, id eſt *cp* poſſunt triplum majoris *fl*, id eſt ipſius *le*. Itaque *el* & *lc*, id eſt *ec* & *cp*, id eſt *ep* poteſt quadruplũ ipſius *el*, & per 7 e 12 eſt dupla, & ipſa *ei* eſt item per fabricam dupla ejuſdem. Itaque baſes ſunt æquales. Eodemque modo ductis *id* & *ib* concludetur tertius angulus *bpi* æqualis angulo *ezi*. Itaque per 12 e 14 quinque anguli ſunt æquales.



14. *Diagonius eſt irrationalis ad latus dodecaedri.*

Quintum eſt exemplum ἀλογίας & ἀσυμμετρίας: primum fuit de diagonio & latere quadrati, ſecundum de ſecta proportionaliter & ejus ſegmentis, tertium de diametro circuli & latere quinquanguli inſcripti, quartum de diagonio & latere icoſaedri: quintum modo eſt de diagonio & latere dodecaedri.

15. *Si latus cubi ſecetur proportionaliter, majus ſegmentum erit latus dodecaedri.*

Id enim modo dictum eſt. Atqui hinc etiam eſt geodæſia dodecaedri. Nam ſi ſubtendens angulum quinquanguli quadrata triplicetur, triplicatæ dimidiatum latus erit ſemidiagonius dodecaedri, quia per 3 e 24 diagonius cubi, id eſt dodecaedri poteſt triplum lateris cubici. At ſi quadratum é latere decanguli tollatur de quadrato é latere quinquanguli, latus reliqui erit radius circuli

quinquãgulo circũſcripti: Poſtremo ſi tollatꝗ quadratũ radii à quadato ſemidia gonii, reliqui latꝰ erit perpẽdicularis altitudo. Ut ſi latꝰ decãguli ſit $7\frac{3}{5}$, quadratum erit $57\frac{19}{25}$ triplicatum $173\frac{7}{25}$: latus fere $13\frac{107}{131}$ pro diagonio dodecaedri. Itaque dimidiatum erit pro ſemidiagonio dodecaedri $6\frac{119}{131}$. Radius circularis deinceps invenietur ſic. Si quadratum é latere decanguli tollatur á quadrato de latere quinquanguli, latus reliqui erit radius circuli per 9 & 6 e 18. Ut hic latus quinquanguli eſt $4\frac{2}{3}$, latus decanguli $2\frac{2}{5}$, quadrata autem ſunt $21\frac{7}{9}$, $5\frac{19}{25}$: hujus ab illo ſubductione relinquitur $16\frac{4}{225}$: cujus latus eſt $4\frac{2}{15}$ pro radio circuli. Inventis ſemidiagonio dodecaedri & circuli radio reſtat altitudo. Tolle igitur circularis radii quadratũ $16\frac{4}{225}$ á ſemidiagonii quadrato $47\frac{12453}{17181}$, latus reliqui $31\frac{2714406}{3861225}$ eſt 5 4 pro altitudine, cujus una tertia eſt $\frac{5}{3}$. Baſis quinquangula eſt fere 38, quæ per $\frac{5}{3}$ facit $63\frac{1}{3}$ pro ſoliditate unius pyramidis, quæ per 12 facit 760 pro ſoliditate totius dodecaedri.



16. *Solida plana tantum quinque ſunt ordinata.*

Quod patet ex anguli ſolidi natura per ſpecies planarum figurarum. á duabus planis angulis non comprehenditur angulus ſolidus, ex tribus angulis trianguli ordinati eſt angulus tetraedri, ex quatuor octaedri, ex quinque icoſaedri: é ſex non poteſt: nam ſex plani tales anguli valerent 12 tertias recti, id eſt quatuor rectos. At anguli plani facientes ſolidum ſunt minores quatuor rectis per 8 e 221 é ſeptem igitur & pluribus multo minus eſt poſsibile. E quadratis tribus angulis comprehenditur angulus cubi, é quatuor non poteſt ob eandem cauſſam. E tribus angulis quinquanguli ordinati eſt angulus dodecaedri, é quatuor non poteſt: nam ſinguli valent rectum & unam quintam. Itaque eſſent quatuor recti, & tres quintæ. E pluribus igitur multo minus eſt poſsibile. Demonſtratio hæc accurate ſane & manifeſte colligit, quamuis plana ordinata innumerabilia poſsint eſſe, attamen é generibus angulorum quinque tantum corpora ordinata inſtitui poſſe, unde tetraedrum, octaedrum, icoſaedrum, baſi triangula, cubus quadrangula, dodecaedrum quinquangula componitur. Atque ita geometria Pythagoræ theologiam quandam ex iis quinque corporibus ordinatis reperit, tanquam mens illa ſummi dei ſapientia que de fabricando mundo & ordinatis corporibus exornando cogitans ſtereometricam demonſtrationis hujus ideam ſibi propoſuerit.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXVI. de ſphæra.

Solidum gibbum eſt quod comprehenditur á ſuperficie gibba.
Sic antea planum á ſuperficie plana definitum eſt.

2. *Eſtque*

2. *Eſtque ſphæra aut varium.*

Partitio ſolidorum é ſuperficiebus ſuis intelligitur.

3. *Sphæra eſt gibbum rotundum.*

Potuit etiam definiri quod á ſphærico cõprehenditur. Corpus ſphæricum, ſphæra græce, latine globus appellatur: ſed græcum verbum uſitatum teneatur.



Itaque

Sphæra fit converſione ſemicirculi manente diametro. 14 d 11.

Ut hic vides. Euclides hãc ſphæræ fabricam propoſuit, qualis antiquior eſt in ſuperficie, analogia tamen reſpondet, & ſphæram fieri converſione ſemicirculi intelligimus, dum concipimus inane ſpatium (quo ſemicirculus attigerit) corporari. Atq; ut antea de circulo in planis deque ſphærico in gibbis, ſic modo intelligatur ſphæram in ſolidis eſſe ordinatiſsimam.



4. *Maximus ſphæræ circulus eſt, qui ſphæram biſecat.*

Hoc peripheriis ſphæricis reſpondet ut proximũm. Itaque

Circulus propior maximo major eſt remotiore. Et

Aequi diſtantes á maximo ſunt æquales.

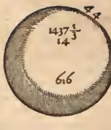
Ut in ſuperiore exemplo.

5. *Planus é diametro & ſextante ſphærici eſt ſphæra.*

Ut antea circulo & ſphærico, ſic modo cubo & ſphæræ ſua analogia eſt. Cubica ſuperficies comprehenditur ſex baſibus quadratis æqualibus, & ſphæra

y 2 item

item cõprehenditur ſex baſibus. ſphæricis æqualibus cubicas baſes ambi



entibus: Cubus efficitur multiplicata ſexta parte baſis per latus: & ſphæra ſimiliter efficitur multiplicata ſexta ſphærici parte per diametrum tanquam per latus. Sic planus é $\frac{616}{6}$ & 14 diametro eſt $1437\frac{1}{3}$ ſoliditas ſphæræ. *Itaque*

1. *Ut 21 ad 11, ſic cubus diametri ad ſphæram.*

Ut hic cubus é 14 eſt 2744. facile enim fuit comparanti cubum 2744 cum ſphæra deprehẽdere 2744 ad $1437\frac{1}{3}$ eſſe in minimis terminis ejuſdẽ rationis, ut 21 ad 11. Ergo hæc geodæſia eſt ſphæræ: de ſphæræ ſectore & ſectione geodæſia poſtea erit. *Et*

2. *Planus é radio & ſextante ſphærici eſt hemiſphærium.*

Sed accuratius eſt ſumere dimidium ſphæræ.

6. Sphæræ habent triplicatam rationem diametrorum. 18 p 12.

Sic antea dictum eſt circulos eſſe ut à diametris quadrata, quia eſſent plana ſimilia, & diametros in circulis eſſe, ut modo in ſphæris, homologa latera. Itaque cum ſphæræ figuræ ſint ſimiles & triplicis dimenſionis, habent rationem diametrorum triplicatam. Quantus vero ſit uſus propoſitionis hujus, aſtronomia inſigne exemplum ſuppeditat de differentia ſolis & terræ. Nam cum Ptolemæus diametros ſolis & terræ deprehendiſſet eſſe ut 11 ad 2 ex triplicata ratione ſphærarum reperit rationem ſolis ad terram eſſe 331 ad 8, id eſt ſolem majorem terra centies ſexagies ſexies & $\frac{3}{8}$. Copernicus (quia ſol propius ad terram acceſsit à Ptolemæi tempore, milliaria germanica 9976, id eſt gallica 20952) deprehendit ſolem majorem eſſe terra centies ſexagies ſexies & $\frac{7}{8}$ ut prope ſemel amplius ſuperet.

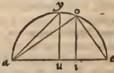
7: Quinque corpora ordinata inſcribuntur eidem ſphæræ converſione ſemicirculi habentis pro diametro in tetraedro rectam potentem ſeſquialterum ad latus tetraedri, in quatuor ordinatis reliquis ordinati ipſius diagonium.

Corporum planorum ordinatorum adſcriptio eſt in ſphæram, ut ſuperficierum planarum antea fuit in circulum: trianguli & ordinati triangulati quadrãguli, quinquanguli, ſexanguli, decanguli, quindecanguli. Sed enim figuras illas planas geometres inſcripſit & circumſcripſit circulo. Corpora autem quinque ordinata & polyedrum præterea ſtereometris ſphæræ duntaxat inſcripſit: polyedrum,

polyedrum in ſcholis reliquimus: ordinata tamen complectimur. Adſcriptio igitur iſta ſeparatim tractatur á fabrica corporum ipſorum, ut in planis alio loco trianguli & quadrati fabrica inſtituitur: alio traditur adſcriptio. Converſio autem ejuſdem ſemicirculi ſphæram omnibus communem efficit.

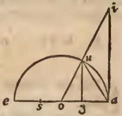
8. *E' ratione axis ſphærici latera tetraedri, cubi, octaedri, dodecaedri deprehenduntur.*

Axis in tribus primis corporibus eſt rationalis ad latus, ut patuit: poteſt enim ſeſquialterum lateris tetraedrici, triplum cubici, duplum octaedrici. Itaque ſi axis *ae* ſecetur dupla ratione in *i*, & perpendicularis *io* connectatur ad *a* & *e* erunt latera *oa* tetraedri & *oe* cubi, ut patet per 2 c 4 e 8 & 1 c 15 e 4 & cubici lateris proportionaliter ſecti majus ſegmentum eſt latus dodecaedri per 15 e 24. Si axis idem biſecetur, ut in *u* & perpendicularis erigatur *uy*, connectaturque *ya*, connectens erit latus octaedri, ut patet item per 2 c 4 e 8 & 1 c 15 e 4. Latus icoſaedri hoc modo habetur.



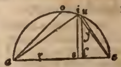
9. *Si recta æqualis axi ſphærico, eique á termino perpendicularis connectatur ad centrum, recta á ſectione peripheriæ ad dictum terminum erit latus icoſaëdri.*

Ut hic eſto axis *ae*, diameter ſemicirculi *aue*, & *ai* æqualis ipſi axi, & perpendicularis á termino connectatur ad centrum per rectã *io*, recta á ſectione *u* in *a* erit latus icoſaedri: Ducatur ab *u* perpendicularis *uy*, hic duo triangula *iao*, & *uyo* ſunt æquiangula per c 9 e 7. Itaque per 9 e 7 ſicuti *ia* ad *ao*, ſic *uy* ad *yo*. At *ia* eſt dupla ipſius *ao*. Itaque *uy* eſt dupla ipſius *yo*: poteſt itaque per 7 e 12 quadruplũ, & ideo *uy* & *yo*, id eſt per 5 e 12 *uo*, id eſt rurſus per 17 e 4 *ao* poteſt quintuplum *yo*: At *yo* eſt minor quã *oa*, id eſt quam *oe*: æqualis ſecetur *os*. Jam ut dimidia *ao* poteſt quintuplum dimidiæ *yo*, ſic dupla *ae* poterit quintuplum duplæ *ys*. Itaque per 11 e 25 cum diagonius *ae* poſsit quintuplum ipſius *ys*, *ys* erit latus ſexanguli inſcripti circulo circumſcribenti quinquangulum icoſaedri: At perpendicularis *uy* æquatur ipſi *ys*, quia utraque dupla eſt ipſius *yo*. Quare *uy* eſt latus ſexanguli: at *ay* eſt latus decanguli, æquatur enim ipſi *se*, quia ſi ab æqualibus radiis *oa* & *oe* tollantur æquales *oy* & *os*, relinquentur æquales *ya* & *se*: & diagonius icoſaedri per 9 e 25 componitur é latere ſexanguli utrinque continuato latere decanguli. Quare *ay* eſt latus decanguli. Poſtremo *ua* potens latera ſexanguli & decanguli per 9 e 18 erit latus icoſaedri.



10. *Ex ordinatis quinque corporibus eidem ſphæræ inſcriptis tetraedrum lateris magnitudine eſt primum, octaedrum ſecundum, cubus tertium, icoſaedrum quartum, dodecaedrum quintum.*

Ut patebit ſi in unum recolligãtur omnia ſic. Nam *ai* latus tetraedri ſubtendit majorem peripheriam quam *ao* latus octaedri, & *ao* majorem quam *ie* latus cubi, quia ſubtendit dimidiam: & *ie* quam *ue* latus icoſaedri, & *ue* quam *ye* latus dodecaedri. Poſtremum Euclides demonſtrat operoſius: Repetantur igitur ex antecedentibus ſectiones axis primo duplæ rationis in *s*, & latus ſexanguli *rl*,



latuſque decanguli *ar* inſcriptorum eidem circulo icoſaedri quinquangulum circumſcribenti, & perpendiculares *is* & *ul*. Hic duo triangula *aie* & *ies* ſunt per 4 e 8 ſimilia, & ut *se* eſt ad *ei*, ſic *ie* ad *ea* & per t c 15 e 4, ut *se* eſt ad *ea*, ſic quadratum ex *se* ad quadratum ex *ei*, & inverſe ut *ae* eſt ad *se*, ſic quadratum ex *ie* eſt ad quadratum ex *se*. At *ae* eſt tripla ipſius *se*. Ergo quadratum ex *ie* eſt triplum quadrati ex *se*. At quadratum ex *as* per theſim & 7 e 12 eſt quadruplum quadrati ex *se*. Itaque etiam majus quadrato ex *ie*, rectaque *as* major quam *ie* & *al*, ideo multo major. At *al* per theſim componitur ex lateribus ſexanguli & decanguli *rl* & *ar*. Ergo per 1 c 5 e 18 ſecatur proportionaliter, & majus ſegmentum eſt latus ſexanguli ipſum *rl*, & majus ſegmentum ipſius *ie* proportionaliter item ſectæ eſt *ye*: eſt igitur major ipſa *rl* quam *ye*, & ipſi *rl*, jam æqualis oſtenſa eſt *ul*. Itaque *ul* eſt major quam *ye*, ſed *ue* latus icoſaedri per 11 e 6 major quam *ul*. Itaque latus icoſaedri multo majus eſt latere dodecaedri.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXVII.
de cono & cylindro.

Solidum varium eſt quod comprehenditur á ſuperficie varia & baſi.

Hic enim baſis ad ſuperficiem variam addenda eſt.

2. *Si varia habent axes diametris baſium proportionales, ſunt ſimilia.* 24 d 11.

Conſectarium eſt è 14 e 4. Hic enim axes & diametri ſunt tanquam crura æqualium angulorum, nempe rectorum in baſi & axe perpendiculari.

3. *Varium eſt conus aut cylindrus.*

Cauſſa partitionis è partitione ſuperficierum intelligitur.

4. *Conus eſt quod á conico & baſi comprehenditur.*

Hic baſis

Hic baſis eſt circulus.



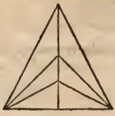
Itaque

1. *Fit converſione trianguli rectanguli manente altero crure.*

Ut patet nempe è varii definitione. Hanc conifabricam proponit Euclides 18 d 11: nec alium conum videtur tum ſtereometria percepiſſe. Apollonius conum generaliter tractavit, & ſpecies recti atque obliqui diſtinxit, ideoque propter conicam doctrinam altius extructam magnus geometra dictus eſt, ut Geminus eſt author apud Euthocium. Et

2. *Conus eſt rectangulus, ſi crus manens & æquale converſo, obtuſangulus ſi minus, acutangulus ſi majus. è 18 d 11.*

Hic conicæ altitudinis differentia triplex proponitur è triplici angulorum differentia, qua dimidiati coni vertex diſtinguitur: differentia tamen optica potius quam geometrica. Conus enim eminus videtur inſtar trianguli. Itaque pro differentia altitudinis apparet vertice rectangulo, obtuſangulo, acutangulo: ut hic minimus conus eſt obtuſangulus, medius rectangulus, ſummus acutangulus.



Cauſſa vero triplicis differentiæ in angulis è differentia crurum eſt è conſectariis triplicis trianguli de recta biſecante baſim, ut patet ad finem 8 lib. Et

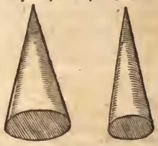
3. *Conus eſt prima figura variarum.*

Conus enim ſic primus eſt in ſolidis variis, ut triangulum in planis rectilineis, ut pyramis in ſodidis planis, neque in alia ſolida varia ſimpliciora dividi poteſt. Et

4. Coni

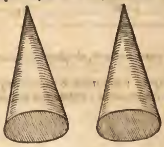
4. *Coni æquealti ſunt ut baſes. Quæ eſt. 11 p 12.*

Ut hic vi- des.



5. *Reciproci baſi & altitudine ſunt æquales. 15 p 12.*

Conſectaria ſunt é 12 & 13 e 4. Ut hic vi- des.



5. *Cylindrus eſt quod á cylindraceo & oppoſitis baſibus comprehenditur.*

Hic enim circuli duo paralleli ſunt baſes circuli.



Fit converſione parallelogrammi rectanguli manente altero latere. 2 1 d 11.

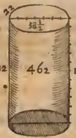
Ut patet ex eadem varii definitione.

Itaque

Planus

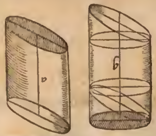
6. *Planus é baſi & altitudine eſt ſoliditas cylindri.*

Geodæſia hîc é priſmate repetitur, ut ſi cylindri baſis ſit $38\frac{1}{2}$ ex ea & altitudine 12 ſoliditas cylindri eſt



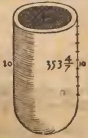
462. Atque geodæſia reſpondet priſmatis, omninoque parallelogrammi rectanguli geodæſiæ.

Si cylindri baſib. oppoſitis ſit obliquus, amputa de baſi altera &



alteram tanto augeas, habebis menſuram totius, ut hic vides in cylindro *a, b.*

Hinc capacitas baſis cylindracei æſtimabitur. Inane enim tanquam plenum metiendum eſt, ut hic. Interioris circuli diameter 6 pedum, peripheria $18\frac{6}{7}$, area igitur $28\frac{2}{7}$, ex qua & altitudine planus eſt $282\frac{6}{7}$. Sic igitur æſtimabis, ut antea quantum



liquoris vel contenti cuiuslibet pes cubicus occupet.

7. *Cylindrus eſt triplus coni baſi & altitudine æqualis.* 10 p 12.

De labyrintho Euclideæ demonſtrationis ad hanc propoſitionem dicetur in ſcholis. Ratio cylindri ad conum ſimpliciter potius aſſumatur é ratione priſma

tis ad pyramidem. Cylindrus enim priſmatis, ut conus pyramidis ſpeciem i/mitatur: quin intra eadem latera priſma, cylindruſque pyramis & conus eſſe poſſunt: & ſi priſma pyramiſque baſis admodum multangulæ fuerint, eadem figura priſma & cylindrus, pyramis & conus videantur: denique intra eadem latera, ut coni cylindrique, ſic priſma & pyramides ex axibus & diametris baſium ſimilitudinem habeant, tamque geometrica ratione poſtulabitur cylin/drum coni triplum eſſe, quam poſtulatur cylindros & conos ſimiles eſſe, quo/rum axes ſunt diametris baſium proportionales. Itaque

1. *Planus é cylindri baſi & triente altitudinis eſt ſoliditas coni baſi & altitudine æqualis.*

E' triplicitate cylindri ſequitur geodæſia coni, ut antea geodæſia pyramidis fuit é triplicitate priſmatis. Altitudo autē habetur. Si quadratū é radio baſis tollatur á quadrato de latere, latus reliqui erit altitudo, ut patet per 5 e 12. Hic igitur é radio 5 quadratū 25

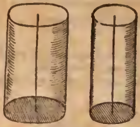


tollatur é quadrato 169 de latere 13, reliqui 144 latus erit 12 pro altitudine, ex cujus tertia 4 & baſi circulari $78\frac{4}{7}$ planus eſt $314\frac{2}{7}$ pro coni ſoliditate. Analogia autem conici ad cylindraceum non reſpondet, ut ſubtriplum ſit conicum cylindracei, ſicuti conus eſt ſubtriplus cylindri: é cono gemino baſis communis fit rhombus archimedeus, ut hic, cujus geodæſia é duobus conis erit.



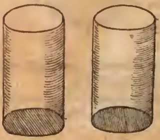
2. *Cylindri æquealti ſunt ut baſes. 11 p 12.*

Cylindracea forma ſacci ſunt, quibus fere frumentū portatur. Si quis igitur agricola ſaccum frumenti vicino commodarit, in cujus baſi diameter ſit 4 pe/dum, tandemque vicinus pro uno ſacco reddat quatuor æquealtos, & in baſi pedalis



pedalis diametri videbitur fortaſſe commodatum reddidiſſe æquali menſura, altitudine videlicet & baſi. At magnam differentiam quadrata ē quatuor ſingularibus diametris 1,1,1,1, id eſt 4 ad quadratum 16 e 4 commodati diametri. Circuli nempe ſunt ut á diametris quadrata, per 2 e 15. Itaque fraus eſſet 12, id eſt tripli. Et

3. *Reciproci baſi atque altitudine ſunt æquales. 15 p 12.*



Hæc enim utraque affectio figuris primarum æque multiplicibus attributa eſt.

Et

Si cylindrus ſecatur plano baſibus oppoſitis parallelo, ſegmenta ſunt ut axes. 13 p 12.



Ut hic vides. Axes enim ſunt altitudines. Conſectarium item eſt ē generali theoremate primarum figurarũ, ſed paulo ſecus propoſitum de altitudine, tanquam generale fuiſſet, Aequalis baſis primas figuras eſſe, ut altitudines. Reſpondet autem 4 e 5 e 23. Inæquales ſectiones ſphæræ huc nobis rejectæ ſunt, quia comprehenduntur á ſuperficie tum ſphærica tum conica, ut ſector: item á plana & ſphærica, ut ſectio, & in utroque ſicut in circulo ſegmentũ ipſum majus minuſque dicitur, & ſector in centro ut antea conſideratur.

8. *Sector ſphæræ eſt ſegmentum ſphæræ, quod foris á ſphærico, intus á conico in centrum terminato comprehenditur, major concavo, minor convexo.*

Archimedi tales ſectores ſunt primo de ſphæra, unde & geodæſia reliqua ſumpta eſt, & hic analogia quædam eſt cum ſectore circulari.

9. *Planus é diametro & ſextante majoris vel minoris ſphærici eſt ſector major vel minor.*



Ut hic é diametro 14 & $4\frac{2}{3}$ (quæ eſt una ſexta ſphærici majoris) planus eſt $1026\frac{2}{3}$ pro ſoliditate majoris ſectoris. Sic ex eadē diametro 14 & $29\frac{1}{3}$ quæ eſt $\frac{1}{3}$ de 176 minore ſphærico planus eſt $410\frac{2}{3}$ pro ſoliditate minoris ſectoris. Atque hinc poſtremo ſoliditas ſectionis oritur additione & ſubductione.

10. *Si major ſector augeatur intermedio cono, totus erit major ſectio: ſi minor minuatur, reliquus erit minor ſectio.*

Ut hic conus intermedius dimenſus eſt $126\frac{4}{63}$ additus ſectori majori componit $2152\frac{46}{63}$: ac idem detractus minori ſectori relinquit $284\frac{38}{63}$.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

BASILEAE, PER EUSEBIUM EPISCOPIUM, & Nicolai fratris heredes. Anno Salutis humanæ M. D. LXIX.